الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة زيان عاشور الجلفة
كلية العلوم الإقتصادية و العلوم التجارية و علوم التسيير

مطبوعة بعنوان :

نظرية اتخاذ القرار

محاضرات و أعمال موجهة

ميدان : العلوم الإقتصادية

الوحدة: UM6

المستوي: سنة ثالثة تخصص اقتصاد كمي السداسي الخامس

الحجم الساعي الأسبوعي:

محاضرة: ساعة و نصف

أعمال موجهة: ساعة و نصف

إعداد

الدكتور قويدر بورقبة أستاذ محاضر "أ"

السنة الجامعية: 2019/2018

فهرس المحتويات

مقدمــة.....أ–ب

الفصل الأول: إتخاذ القرار في ظل عدم التأكد.....01

I.القرار مفهومه ، مستوياته و أهدفه..... 02

II.مصفوفة القرار **Decision Matrix**..... 04

III.بناء مصفوفة القرار..... 04

IV..الهيمنة (السيطرة) بين البدائل: 07

V.معايير إتخاذ القرار..... 09

VI.معايير القرار البسيط أو القرار الساذج..... 10

VII.1.معيار التفائل $maxi\ max$..... 10

VII.**2** .تطبيق..... 10

VII.3.معيار " **wald** " $(maxi\ min)$..... 11

VII.4.معيار الندم لـ " **savage** " $(mini\ max\ Regret)$..... 12

VII.5.معيار لابلاس "**Laplace**" التوزيع المتساوي (معيار فرض الإحتمالات المتساوية..... 13

VII.6.معيار هورتس "**hurwinch**" المعيار الموزون أو المعيار الواقعي..... 14

VII.7.معيار نقطة منتصف الطريق..... 15

VIII.إتخاذ القرار في حالة تعدد الأهداف 16

VIII.1.تطبيق 17

IX.–تمارين مقترحة.....17

الفصل الثاني: إتخاذ القرار في ظل المخاطرة.....19

I.إتخاذ القرار في ظرف المخاطرة **Decision Making Under Risk**..... 20

II.مراجعة في الإحتمالات.....20

III.القيمة المالية المتوقعة: **Expected Monetary Value**.....28

IV.جدول خسارة الفرصة البديلة: **.Opportunity Loss Table**..... 29

V.المعلومات التامة: Perfect Information.....30
VI.القيمة المتوقعة في حالة وجود معلومات إضافية..... 34
VII.شجرة القرارات..... 40
VIII.القرارات المتتالية..... 43
IX.شجرة القرار في حالة الحصول على معلومات إضافية..... 49
IX.تمارين مقترحة 53
الفصل الثالث: شبكات الأعمال.....57
I.مصطلحات و مفاهيم متعلقة بشبكات الأعمال..... 58
II.إعتبارات يجب مراعاتها عند بناء شبكة الأعمال 59
III.بعض الأخطاء في بناء الشبكة البيانية 62
IV.رسم شبكات الأعمال 64
V.طريقة المسار الحرج (CPM) 68
V.1.مميزات و فوائد طريقة المسار الحرج 69
V.2.المفاهيم و المصطلحات المستخدمة في طريقة المسار الحرج 70
V.3.تطبيق 72
VI.طريقة تقييم و متابعة برامج المشاريع (PERT) 74
VI.1.حساب إحتمال إنجاز المشروع في مدة معينة قدرها X 76
VI.2.تطبيق 77
VII.علاقة التكلفة بالوقت 81
VII.1.تطبيق (حالة وجود مسار حرج واحد) 84
VII.2.تطبيق (حالة وجود أكثر من مسار حرج) 88
VIII.تمارين مقترحة 97
الفصل الرابع: نظرية المباريات.....101
I.مفهوم نظرية المباريات 102
II.الفرضيات التي تقوم عليها نظرية المباريات 102

III.المصطلحات المتعلقة بنظرية المباريات 103
V.صياغة مصفوفة الدفع للمباريات الثنائية ذات مجمع صفري 104
VI..تطبيق 1 105
VII..تطبيق 2 107
VIII.المباريات المستقرة و نقطة التوازن 109
IX.تطبيق 112
X.تخفيض حجم مصفوفة الدفع بإستخدام قواعد السيطرة 112
IX.المباريات غير المستقرة 115
XI.1.المباريات من الحجم 2×2 115
XI.1.1.الطريقة الحسابية 116
XI.2.1.الطريقة الجبرية 118
XI.2.حل المباريات من الحجم 2×m و n×2 123
XI.1.2.طريقة المصفوفات الفرعية 123
XI.2.2.الحل البياني للمباريات من الحجم 2×m و n×2 129
XI.3.حلول المباريات من الحجم 3×3 فما فوق 137
XII.تمارين مقترحة 149
قائمة المراجع..... 151
جدول التوزيع الطبيعي..... 152

مقدمة

جاءت هذه المطبوعة لتلبي حاجة الطلبة لمقياس "نظرية إتخاذ القرار" للسنة الثالثة علومٌ اقتصادية تخصص اقتصاد كمي تكملة للمعارف التي اكتسبوها عند دراسة مقياس رياضيات مؤسسة في السنة الثانية.

إن هذه المطبوعة هي ثمرة تجربة سنوات عددية في تدريس مقياس نظرية إتخاذ القرار بكلية العلوم الإقتصادية و التجارية و علوم التسيير بجامعة زيان عاشور بالجلفة، ولقد حاولنا أن نستفيد من هذه التجربة لصياغة محتوى المقياس بطريقة تلائم مستوى طلبة هذه الكلية و طبيعة التخصص، و لتحقيق هذا الغرض حرصنا على ربط المفاهيم والقواعد النظرية باستخداماتها التطبيقية؛ فعملنا على إعطاء أمثلة محلولة عن كل مفهوم جديد. و لأن فهم القواعد الرياضية يكون أسهل إذا كان للمتلقي خلفية عن المشكلة التي يحتاج حلها إلى استخدام هذه القواعد، عملنا في كثير من الأحيان إلى التقديم لبعض الدروس أو النظريات بمسألة تكون بمثابة التمهيد، وأحيانا بمثابة مشكلة ننطلق منها لنتوصل إلى النظرية. هذا وننبه طلبتنا الأعزاء إلى أنه يفترض بهم عند دراسة مقياس نظرية إتخاذ القرار أن يكونوا قادرين على إستيعاب المفاهيم الرياضية و لا يبقوا خيالهم حبيس الأمثلة والمسائل المعطاة.

يتضمن البرنامج المقرر على أربعة فصول، حيث خصصنا الفصل الأول معايير إتخاذ القرار في ظل عدم التأكد لشرح أهم المعايير التي يعتمد عليه متخذ القرار لحل المشكلات و تحقيق الأهداف بحيث يكون لا يملك أية معلومات عن أو إحتمالات عن أي من الظروف المستقبلية التي ستقع و تؤثر في قراراته، بينما خصصنا الفصل الثاني إتخاذ القرار في حالة المخاطرة و هنا تطرقنا إلى مختلف المعايير التي يمكن أن يستفيد منها متخذ القرار لإتخاذ قراراته بحيث يكون يملك إحتمالات حول الظروف المستقبلية التي ستقع في المستقبل و تؤثر في قرارته بينما تناول الفصل الثالث شبكات الأعمال لتمكين الطالب من إستعياب كيفية تسيير المشروعات من حيث زمن الإنجاز سواء كان متخذ القرار يدرك تماما زمن إنجاز النشاطات المتعلقة بالمشروع أو يمتلك إحتمالات فقط عن الزمن و تكملة لذلك أضفنا الحالة التي يرغب فيها متخذ القرار بالمفاضلة بين زمن المشروع و تكلفته أما الفصل الرابع فخصص لنظرية المباريات ذات المجموع الصفري التي بواسطتها يتم إتخاذ القرار في ظل تعارض أهداف متخذ القرار مع منافسيه و قد بينا مختلف الطرق لحل هذه المشاكل التي تواجه متخذ القرار في ظل بيئة التعارض.

إن هذه الفصول الأربع تلبي متطلبات مقياس نظرية إتخاذ القرار بما يتناسم مع المنهج المقرر من طرف وزارة التعليم العالي الجزائرية بطريقة مبسطة وسلسة حتى يستوعبها الطالب و بأسلوب رأينا أنه الأنسب لمستوى طالب اقتصاد كمي.

متطلبات المقياس

لفهم هذا المقياس و إستعابه ، يتعين أن كون الطالب ملم بمقياس رياضيات المؤسسة خصوصا ما تعلق بالبرمجة الخطية و طرق حلها التي سوف نستخدمها في الفصل الرابع نظرية المباريات أما الفصل الثاني فيحتاج أن يكون الطالب مدرك للمفاهيم الأساسية للإحتمالات بصفة عام و الإحتمالات الشرطية و نظرية بايز بصفة خاصة ، بينما بقية الفصول فهمي مفاهيم جديدة على الطالب و لا يحتاج إستعابها إلى فهم مقاييس أخرى.

كلمة إلى الطلبة

كثيرا ما نلاحظ أن الطلبة يستخدمون التمارين المقدمة في السلاسل كنماذج أو شبه قوانين في حد ذاتها يحاولون حفظها بينما هي في الحقيقة مجرد وسيلة لفهم الدرس. هذا التشبث بالشكل دون المضمون في محاولة يائسة لمواجهة الامتحان دون فهم حقيقي لمضمون المادة و هو نتيجة حتمية بالنسبة لمن لا يتابع المحاضرات والتطبيقات بالمراجعة المستمرة و الفورية. وحسب رأينا فإن الصعوبة التي يواجهها الطلبة في هذا المقياس سببها أنه مقياس يعتمد أساسا على الفهم أكثر مما يعتمد على التذكر. وهذا الفهم لا يتأتى عن طريق التلقي فقط من الأستاذ، بينما يحتاج أيضا إلى جهد مستقل يبذله الطالب بمفرده مع قدر من التركيز و المثابرة لفهم هذه المادة، و ذلك بالإطلاع على الكتب الموجودة في المكتبة و المراجعة المستمرة و المنتظمة بعد كل محاضرة مع شيء من التركيز على القواعد والمفاهيم حتى يتم فهمها فهما جيدا. وليعمل الطالب على تعميق فهمه من خلال تمارين السلاسل و لكن لا يتخذها "نماذج" جامدة أو قواعد إضافية. إن هدف الأستاذ والجامعة ككل هو إعداد الطالب لمواجهة المشكلات المعقدة للتسيير، وهذا الهدف لا يتحقق إلا بتنمية الذكاء والتزود بعدد من التقنيات المساعدة لكي يكون الطالب قادرة على تحليل المشكلات والوضعيات المعقدة وصياغتها في شكل واضح ودقيق ومن ثم إبداع حلول لها من خلال تفكيره الخاص.

وإذ نقدم لطلبتنا و زملائنا هذا العمل المتواضع، راجيين منهم أن لا يبخلوا علينا بملاحظاتهم وتعليقاتهم حتى نستفيد منها لطبعات مقبلة بحول الله.

الفصل الأول : إتخاذ القرارات في ظل ظروف عدم التأكد

تعتبر عملية اتخاذ القرار جوهر العملية الادارية في منظمات الأعمال ، بل الركيزة الأساسية التي يتوقف عليها نجاح أو فشل المنظمة عبر الزمن .

تتسم بيئة الأعمال اليوم بالتغير المستمر و التعقيد مما يجعل المنظمة في مواجهة عدة مواقف متعددة يصعب حصرها أو الاحاطة التامة بحيثياتها مما يتطلب منها اتخاذ قرارات سليمة و متكاملة لمواجهتها و تحقيق أهدافها مما يعزز بقائها و نموها.

I.القرار مفهومه ، مستوياته و أهدفه

يقصد بعملية اتخاذ القرار إعمال العقل والمنطق لاختيار البديل الأفضل لحل مشكلة ما من بين عدة بدائل متاحة فى ضوء ما يتوفر من بيانات عن هذه المشكلة وعن كل بديل متاح. وتتوقف عملية اتخاذ القرار واختيار البديل الأمثل على نوعية وجودة البيانات التى تتوفر عن هذه البدائل لدى متخذ القرار والتى تصف المشكلة محل الدراسة.

1.I.مفهوم القرار لغة

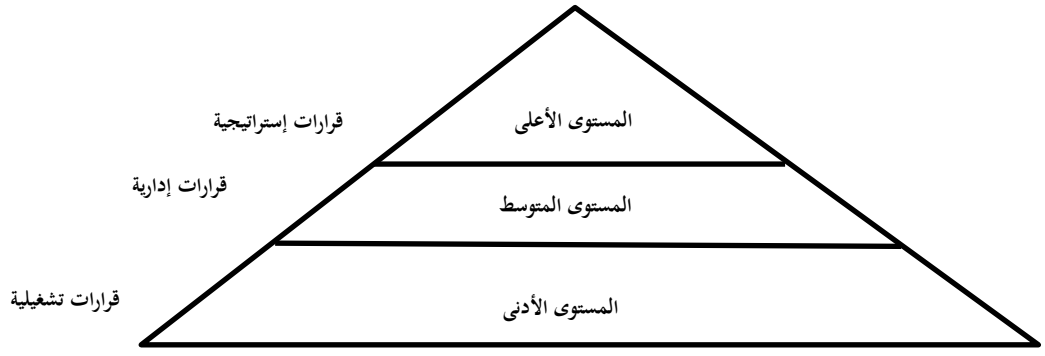
القرار هو فصل أو حكم في مسألة أو قضية أو خلاف

2.I . مفهوم القرار إصطلاحا في ميدان الإدارة

إختيار أحسن البدائل المتاحة بعد دراسة النتائج المتوقعة من كل بديل في تحقيق الأهداف المطلوبة

3.I . أنواع القرارات في المستويات الإدارية

الشكل التالي يوضح أنواع القرارات المتخذة على كل مستوى تنظيمي (إداري)



1.3.I.قرارات تشغيلية

هي القرارات التي تصنع في المستويات التنظيمية الدنيا ، و المتعلقة بالعمليات التشغيلية للمؤسسة ، وهي أقرب لإتباع تعليمات و إرشادات ، منها إلى الإختيار بين البدائل ، وعادة تكون متعلقة بالتأكد من

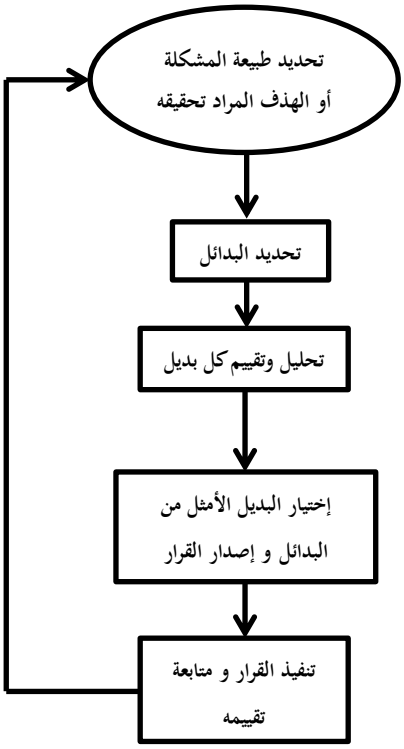
المهام والأنشطة التي قد تم تنفيذها بكفاءة وفاعلية ، ويؤخذ هذا النوع من القرارات في ظل تأكد تام و نتائجها معروفة مسبقا مثل تعطل في خط إنتاج و ما يحتاجه تصليحه من إجراءات نمطية معينة.

I.2.3.قرارات إدارية

هي قرارات تؤخذ على مستوى إداري أعلى مما تؤخذ فيه القرارات التشغيلية ، فعند هذا المستوى يقوم المديرون بإتخاذ قراراتهم لحل مشكلات التنظيم و الرقابة على الأداء و فرض كذلك قرارات متعلقة بالتأكد من الإستخدام الفعال لموارد المؤسسة في سبيل تحقيق أهدافها ، ولا توجد في هذا النوع من القرارات إجراءات معروفة مسبقا يجب إتباعها ، ولكن متخذ القرار يقوم بتجميع المعلومات اللازمة لتشخيص و حل المشكلة و أن يستخدم حكمه الشخصي و رصيده من الخبرة في إختيار البدائل ، في هذه الحالة يتم إتخاذ القرارات في ظروف تتسم بعدم تأكد نسبي أي مخاطرة.

I.3.3.القرارات الإستراتيجية: هي قرارات تؤخذ على مستوى قمة الهيكل التنظيمي ، بواسطة الإداراة العليا في المؤسسة، و هي قرارات تغطي مدى زمني أطول مقارنة بالقرارات السابقة و تتعلق القرارات الإستراتيجية بالوضع التنافسي للمؤسسة في السوق ، وفي إغتنام الفرص و تجنب مخاطر البيئة وهذا النوع من القرارات يحتاج إلى معلومات خاصة بالبيئة أكثر من غيره ، كما تهتم القرارات الإستراتيجية بتحديد أهداف المؤسسة و الموارد اللازمة لتحقيقها و السياسات التي تحكم عمليات التوزيع و الإستخدام بهذه الموارد....إلخ.

I.4. خطوات إتخاذ القرار



خطوات إتخاذ القرار

1. تحديد طبيعة المشكلة أو الهدف المراد تحقيقه
2. تحديد البدائل
3. تحليل وتقييم كل بديل
4. إختيار البديل الأمثل من البدائل و إصدار القرار
5. تنفيذ القرار و متابعة تقييمه

II.مصفوفة القرار Decision Matrix

لتسهيل عملية إتخاذ القرار و الإلمام بالظروف المحيطة به ، يلجأ متخذ القرار إلى إنشاء جدول يوضح البدائل المتاحة و العوامل المؤثرة فيها ، يسمى هذا الجدول بمصفوفة القرار .

II.1.تعريف مصفوفة القرار

هي عبارة عن مصفوفة توضح العلاقة بين البدائل المتاحة و حالات الطبيعة و النتائج وبالتالي يمكن تعريفها بأنها مجموعة النتائج المرتبطة بتفاعل ما بين البدائل المتاحة لمتخذ القرار و حالات الطبيعة المستقبلية .

II.2.مكونات مصفوفة القرار

تتكون مصفوفة القرار من ثلاثة عناصر أساسيه هي:

II.1.2.البدائل Actions: هي عبارة عن الخيارات المتاحة التي يملكها متخذ القرار لحل مشكلة معينة أو تحقيق هدف ما بحيث يستطيع التحكم فيها و المفاضلة بينها ، إذ تمثل مجموعة محدودة و منفصلة يرمز لها بالرمز a_i بحيث:

$$a_i = a_1, a_2, \dots, a_n$$

II.2.2.حالات الطبيعة States of Nature: هي عبارة عن الظروف أو العوامل المستقبلية الممكنة الحدوث و التي تأثر على نتائج إختيار كل بديل متاح ، وهي منفصلة عن بعضها البعض ولا بد من حدوث أحدها ، ولا يمكن لمتخذ القرار التحكم بها ، إلا أنه يمكن له حصرها و نرمز لها بالرمز s_j حيث:

$$s_j = s_1, s_2, \dots, s_j$$

II.3.2.النتائج payoff: تعبر عن المنفعة التي يتحصل عليها متخذ القرار عندما يختار البديل a_i فيما لو تحققت حالة الطبيعة s_j و قد تعبر عن وحدات نقدية أو أي وحدة قياس أخرى ، و يرمز لها بالرمز $v(a_i, s_j)$ فإذا كانت قيمتها سالبة فتعني خسارة أو تكلفة أما إذا كانت موجبة فتعني ربحا أو إيراد .

III.بناء مصفوفة القرار

نفترض أن متخذ القرار يستطيع تحديد كل الأهداف التي يرغب في الوصول إليها و تعريفها و دراسة كل البدائل الممكنة فإذا كانت:

a_i : مجموعة البدائل (أو الأفعال الممكنة) المتاحة أمام متخذ القرار $(i = 1,2, \dots n)$.

و S_j : مجموعة حالات الطبيعة المستقبلية الممكنة الحدوث حيث:$(j = 1,2, \dots m)$.

$v(a_i, s_j)$: النتيجة المترتبة على إختار البديل a_i فيما لو تحققت حالة الطبيعة s_j .

تصبح مصفوفة القرار بالشكل التالي:

(حالات الطبيعة S_j | البدائل A_i)	s_1	s_2	...	s_j	...	s_m
a_1	$v(a_1, s_1)$	$v(a_1, s_2)$	...	$v(a_1, s_j)$	...	$v(a_1, s_m)$
a_2	$v(a_2, s_1)$	$v(a_2, s_2)$	...	$v(a_2, s_j)$	...	$v(a_2, s_m)$
...	...	...	...	...	...	...
a_i	$v(a_i, s_1)$	$v(a_i, s_2)$	...	$v(a_i, s_j)$	...	$v(a_i, s_m)$
...	...	...	...	...	...	...
a_n	$v(a_n, s_1)$	$v(a_n, s_2)$	...	$v(a_n, s_j)$	...	$v(a_n, s_m)$

من خلال الجدول السابق نلاحظ أن:

- الأسطر تحوي البدائل الممكنة .
- الأعمدة تحوي حالات الطبيعة الممكنة الحدوث.

III.1.ملاحظات

- إذا كانت العوائد في مصفوفة القرار موجبة تدعى مصفوفة القرار في هذه الحالة بمصفوفة أرباح وإذا كان سالبة فتدعى مصفوفة خسائر .
- عندما تكون مصفوفة القرار هي مصفوفة أرباح فإنه قد توجد بعض عناصر المصفوفة سالبة و هذا يدل على أن العائد هو خسارة.

III.2.تطبيق

وكالة تحسين وبيع السيارات ترغب في شراء بين 1-4 سيارات ، سعر السيارات يعتمد على الكمية المشتراة كالتالي:

عدد السيارات	التكلفة الكلية بالدولار
1	110000
2	150000
3	230000
4	315000

الشركة تنوي أن تبيع السيارة الواحدة بمبلغ 90000$ ،السيارة التي لا تباع بعد قدم الطراز يخفض سعرها ليصبح 75000$ ، إذا كان الطلب أكبر من العدد المتوفر من السيارات فإن الشركة تفقد أرباح كان من الممكن الحصول عليها بمبلغ 5000$ للسيارة لكل زبون لم يجد طلبه.

المطلوب:

إنشاء مصفوفة القرار لهذه المشكلة.

الحل

من أجل انشاء مصفوفة القرار نتبع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى

تحديد الهدف المراد تحقيقه و هو عدد السيارات الواجب شرائها لتحقيق أكبر عائد

الخطوة الثانية

نقوم بتحديد البدائل الممكنة و حلات الطبيعة المستقبلية

من خلال معطيات التطبيق يتضح لنا أن البدائل المتاحة أمام متخذ القرار تمثل كمية السيارات التي يجب شراؤها و هي أربعة بدائل:

a_1 : شراء سيارة واحدة.

a_2 : شراء سيارتين.

a_3 : شراء ثلاثة سيارات.

a_4 : شراء أربعة سيارات.

أما حالات الطبيعة التي تتأثر بها البدائل فهي حجم الطلب على السيارات في المستقبل حيث لدينا أربعة حالات طبيعة هي:

s_1 : بيع سيارة واحدة.

s_2 : بيع سيارتين.

s_3 : بيع ثلاثة سيارات.

s_4 : بيع أربعة سيارات.

الخطوة الثالثة:

تحديد النتائج المترتبة عن غختيار بديل معين وحدوث حالة طبيعة معينة و في هذا التطبيق نجد النتائج تتحدد وفق العلاقات التالية

الطلب = العرض ⟵ ربح = (90000× عدد السيارات المباعة) – تكاليف شراء السيارات

الطلب > العرض ⟵ ربح = (90000× عدد السيارات المباعة) – تكاليف شراء السيارات – (5000× عدد السيارات التي تمثل الفرق بين ما هو مطلوب وما هو معروض)

الطلب < العرض ⟵ ربح = (90000× عدد السيارات المطلوبة + 75000× عدد السيارات التي تمثل الفرق بين ما هو معروض وما هو مطلوب) – تكاليف شراء السيارات.

الخطوة الرابعة

من خلال ما سبق يمكن إنشاء مصفوفة القرار كما هو موضح في الجدول التالي:

		حالات الطبيعـــــــــة (الطلب)			
		الطلب: سيارة	الطلب: سيارتين	الطلب: ثلاثة سيارات	الطلب: أربعة سيارات
البدائل المتاحة (العرض)	شراء سيارة	20000–	25000–	30000–	35000–
	شراء سيارتين	15000	30000	25000	20000
	شراء ثلاثة سيارات	10000	25000	40000	35000
	شراء أربعة سيارات	0	15000	30000	45000

IV. .الهيمنة (السيطرة) بين البدائل:

IV.1.حالة مصفوفة أرباح

إذا كانت عوائد البديل a_{i^*} عند جميع حالات الطبيعة أكبر منها أو تساوي العوائد للبديل a_i ، يقال أن البديل a_{i^*} يسيطر أو يهيمن على البديل a_i بمعنى :

$$v(a_{i^*}, s_{j^*}) \geq v(a_i, s_j)$$

IV.2.حالة مصفوفة خسائر

إذا كانت عوائد البديل a_{i^*} عند جميع حالات الطبيعة أقل منها أو تساوي العوائد للبديل a_i ، يقال أن البديل a_{i^*} يسيطر أو يهيمن على البديل a_i بمعنى :

$$v(a_{i^*}, s_{j^*}) \leq v(a_i, s_j)$$

يجب التخلص من جميع البدائل المسيطر عليها لأنها لا تفيد متخذ القرار و هناك بدائل أفضل منها من حيث العوائد مهما كانت حالة الطبيعة التي ستحدث تستمر هذه العملية إلى أن تصبح مصفوفة القرار غير قابلة للإختزال.

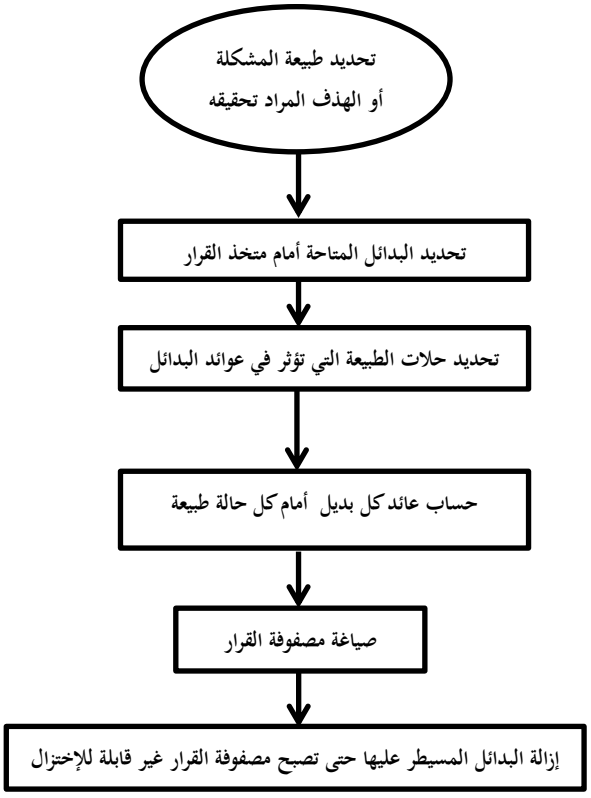
IV.3.تطبيق

بالرجوع إلى مصفوفة القرار الخاصة بالتطبيق السابق نجد أن البديل الأول (شراء سيارة واحد) مسيطر عليه من قبل باقي البدائل لأن عوائده أقل في كل حالات الطبيعة من باقي البدائل و بالتالي يجب حذفه لأنه لا يفيد متخذ القرار و تصبح مصفوفة القرار بالشكل التالي:

	حالات الطبيعـــــــــة (الطلب)			
	الطلب: سيارة	الطلب: سيارتين	الطلب: ثلاثة سيارات	الطلب: أربعة سيارات
شراء سيارتين	15000	30000	25000	20000
شراء ثلاثة سيارات	10000	25000	40000	35000
شراء أربعة سيارات	0	15000	30000	45000

لاحظ أن مصفوفة القرار أصبحت غير قابلة للإختزال لأنه لا يوجد بديل يسيطر على بديل آخر.

خلاصة لما سبق يمكن تلخيص خطوات إنشاء مصفوفة القرار وفق الشكل التالي:



V.معايير إتخاذ القرار

تصنيف معايير إتخاذ القرار إلى:

V.1.إتخاذ قرار تحت شرط التأكد Certainty :ويتوجب المعرفة التامة بحالات الطبيعة المستقبلية التي ستحدث.

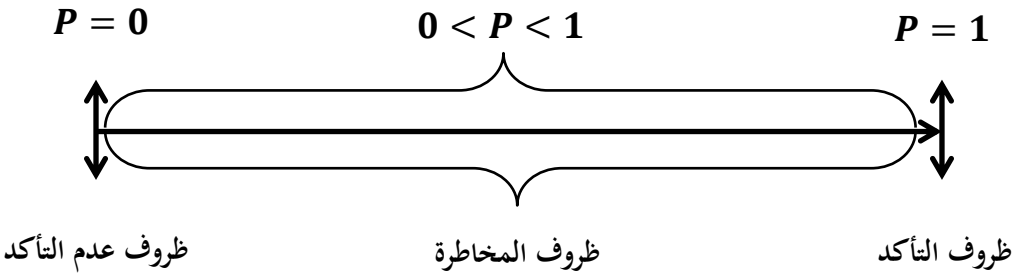
V.2.إتخاذ قرار تحت شرط المخاطرة Risk :وفيها بعض العلم عن إحتمالات حدوث حالات الطبيعة المستقبلية.

V.3.إتخاذ قرار تحت شرط عدم التأكد Uncertainty :لايوجد أي علم عن إحتمالات حدوث حالات الطبيعة المستقبلية.

V.4.اتخاذ القرار فى حالة التعارض Conflict: في هذه الحالة تكون مصالح متخذ القرار متعارضة مع أطراف آخرى.

و الشكل التالي يوضح معايير اتخاذ القرار بالإعتماد على إحتمالات حدوث حالات الطبيعة والتي يرمز لها بالرمز P .

معايير إتخاذ القرار وفقا لقيمة P



VI.إتخاذ القرار في حالة عدم التأكد

في هذه الحالة هناك أكثر من حالة طبيعية إلا أن متخذ القرار ليس لديه المعلومات الكافية أو الخبرة التي تمكنه من تقدير إحتمالات حدوث حالات الطبيعة المختلفة و يحدث هذا عادة عندما يكون متخذ القرار أمام هدف أو مشكلة جديدة من نوعها ، و بالتالي المعلومات المتوفرة لديه هي:

- جميع بدائل القرار – جميع حالات الطبيعة – العوائد المقابلة لكل قرار و حالات الطبيعة.

إن الأساليب التي تستخدم في إتخاذ القرار عندما يجهل متخذ القرار إحتمالات حدوث حلات الطبيعة تسمى معايير القرار البسيط أو القرار الساذج .

VII.معايير القرار البسيط أو القرار الساذج

ذكرنا سابقا بأن متخذ القرار يجهل إحتمالات وقوع حالات الطبيعة و بالتالي يعتمد في إتخاذ القرار على هذا النوع من المعايير الذي تتناسب مع سلوك متخذ القرار من حيث درجة التفاؤل أو التشاؤم لسينريوهات وقوع حالات الطبيعة و يمكن سرد أهم هذه المعايير فيما يلي:

VII.1.معيار التفائل $maxi\ max$

يعتمد هذا المعيار على أفضل سيناريو يمكن أن يحدث وبالتالي يناسب متخذ القرار المتفائل و المندفع الذي يعتقد أن أفضل عائد ممكن سوف يحدث دائما بغض النظر عن البديل المختار و بالتالي يبحث عن البديل الذي يعطي أقصى عائد، و يتم حسابه وفق القانون التالي:

$$\max_j \left(\max_i v(a_i, s_j)\right)$$

أما في حالة مصفوفة خسائر

$$\min_j \left(\min_i v(a_i, s_j)\right)$$

لتحديد القرار المناسب طبقا لهذا المعيار نتبع الخطوات التالية:

- ✓ إختيار العائد الأفضل لكل بديل (العائد الأقل في حالة مصفوفة خسائر).
- ✓ إختيار القرار الذي يحقق أفضل عائد من بين أفضل العوائد (أقل عائد من بين أقل العوائد في حالة مصفوفة خسائر) التي تم إختيارها في الخطوة الأولى .

VII.2.تطبيق

المصفوفة التالية تمثل الأرباح التي تحققها شركة ما في ظل أربع بدائل للقرار و أربع حالات طبيعة و المطلوب إختيار القرار المناسب بإستخدام معيار التفائل.

$(a_i$ البدائل $\mid s_j$ حالات الطبيعة$)$	s_1	s_2	s_3	s_4	$\max_i v(a_i, s_j)$
a_1	40	60	90	20	90
a_2	70	60	30	50	70
a_3	60	60	80	70	80
a_4	10	70	40	60	70

$$\max_j \left(\max_i v(a_i, s_j)\right) = 90$$

أفضل قرار هو اختيار البديل الأول الذي يحقق أفضل عائد المقدر بـ 90.

ملاحظة

إذا تساوى أفضل الأفضل في قرارين فلمتخذ القرار أن يختار أي منهم و يرجع الإختيار في هذه الحالة لخبرة متخذ القرار.

VII.3.معيار " wald " $(maxi\ min)$

يعكس هذا المعيار التشاؤم أو التحفظ لدى متخذ القرار حيث يعتقد أن أسوأ حالة ممكنة سوف تقع و بالتالي يسعى لتعظيم أقل العوائد المضمونة و يتم حسابه وفق القانون التالي:

و يتم تحديد القرار المناسب طبقا للخطوات التالية:

$$\max_j \left(\min_i v(a_i, s_j)\right)$$

أما في حالة مصفوفة خسائر

$$\min_j \left(\max_i v(a_i, s_j)\right)$$

لتحديد القرار المناسب طبقا لهذا المعيار نتبع الخطوات التالية:

- ✓ إختيار العائد الأسوأ لكل بديل (الأكبر في حالة مصفوفة خسارة).
- ✓ إختيار القرار الذي يحقق أفضل عائد من بين أسوأ العوائد (أقل عائد من بين أكبر العوائد في حالة مصفوفة خسائر) التي تم إختيارها في الخطوة الأولى.

بالرجوع إلى معطيات المثال السابق نجد:

$(a_i$ البدائل $\mid s_j$ حالات الطبيعة $)$	s_1	s_2	s_3	s_4	$\min_i v(a_i, s_j)$
a_1	40	60	90	20	20
a_2	70	60	30	50	30
a_3	60	60	80	70	60
a_4	10	70	40	60	10

$$\max_j \left(\min_i v(a_i, s_j)\right) = 60$$

أفضل قرار هو اختيار البديل الثالث الذي يحقق عائد يقدر بـ 60.

VII.4.معيار الندم لـ " savage " $(mini\ max\ Regret)$

هو معيار يقيس الندم الذي سيشعر به متخذ القرار إذا إختار قرار خطأ لكل حالة من حالات الطبيعة فهو طبقا لهذا المعيار يسعى إلى تقليل الندم التي سيحصل عليه إذا حدث ذلك و بالتالي فهو يفترض أنه لم يأخذ القرار الصحيح في كل حالة طبيعة ، يناسب هذا المعيار متخذ القرار المتشائم و المحافظ.

و يتم تحديد القرار طبقا لهذا المعيار نتبع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى

إنشاء مصفوفة الندم Regret (الفرصة البديلة Lost Opportunity) و هي المصفوفة التي عناصرها تساوي العائد المقابل لكل قرار عند حالة طبيعة معينة – أفضل العوائد عند نفس حالة الطبيعة.

نفرض أن $R(a_i, s_j)$: تمثل قيمة الندم الذي يشعر به متخذ القرار عند إختياره البديل a_i و حدوث حالة الطبيعة s_j عندئذ تصبح:

$$R(a_i, s_j) = v^*(s_j) - v(a_i, s_j)$$

حيث $v^*(s_j)$ هي أفضل عائد في حالة مصفوفة أرباح و أقل عائد في حالة صفوفة خسائر الذي تحصل عليه متخذ القرار عند حدوث حالة الطبيعة s_j .

و مصفوفة الندم تعطى بالشكل التالي:

$\left(a_i \text{البدائل} \middle\| S_j \text{ حالات الطبيعة}\right)$	s_1	s_2	...	s_j	...	s_m
a_1	$R(a_1,s_1)$	$R(a_1,s_2)$	...	$R(a_1,s_j)$	...	$R(a_1,s_m)$
a_2	$R(a_2,s_1)$	$R(a_2,s_2)$	...	$R(a_2,s_j)$	...	$R(a_2,s_m)$
...	...	...	...	...	...	...
a_i	$R(a_i,s_1)$	$R(a_i,s_2)$	...	$R(a_i,s_j)$	...	$R(a_i,s_m)$
...	...	...	...	...	...	...
a_n	$R(a_n,s_1)$	$R(a_n,s_2)$	...	$R(a_n,s_j)$	...	$R(a_n,s_m)$

الخطوة الثانية

يختار أمام كل قرار أكبر ندم متحقق (أقل ندم متحقق في حالة مصفوفة خسائر).

الخطوة الثالثة

يختار القرار الذي يمثل أقل ندم من بين أكبر ندم الذي تم تحديده في الخطوة السابقة $mini\ max$.

من خلال الخطوات الموضحة سابقا يمكن صياغة قانون معيار الندم وكالتالي:

$$\min_j \left(\max_i R(a_i,s_j)\right)$$

بالرجوع إلى معطيات المثال السابق نجد:

$\left(a_i \text{البدائل} \middle\| s_j \text{ حالات الطبيعة}\right)$	s_1	s_2	s_3	s_4	معيار الندم = قيمة القرار –أكبر قيمة للطبيعة				قيمة أسوأ ندم $\max_i R(a_i,s_j)$	أقل أسوأ ندم $\min_j \left(\max_i R(a_i,s_j)\right)$
					70–	70–	90–	70–		
a_1	40	60	90	20	30–	10–	0	50–	50–	
a_2	70	60	30	50	0	10–	60–	20–	60–	
a_3	60	60	80	70	10–	10–	10–	0	10–	10–
a_4	10	70	40	60	60–	0	50–	10–	60–	

$$\min_j \left(\max_i R(a_i,s_j)\right) = \mathbf{10}$$

و حيث أن أقل أسوأ ندم هو 10 إذن يكون القرار الأفضل هو البديل الثالث.

VII.5.معيار لابلاس "Laplace" التوزيع المتساوي (معيار فرض الإحتمالات المتساوية)

متخذ القرار ليس متفائل أو متشائم ، وليس لديه الخبرة أو المعلومات التي تمكنه من تقدير الإحتمالات لكل حالة طبيعة لذالك يعتبر أن الإحتمالات متساوية لكل حالة من حالات الطبيعة ، و يعطى قانونه كمايلي:

$$\max_j \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{m} v(a_1, s_j)}{m}, \frac{\sum_{j=1}^{m} v(a_2, s_j)}{m}, \dots, \frac{\sum_{j=1}^{m} v(a_n, s_j)}{m} \right\}$$

أما في حالة مصفوفة خسائر

$$\min_j \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{m} v(a_1, s_j)}{m}, \frac{\sum_{j=1}^{m} v(a_2, s_j)}{m}, \dots, \frac{\sum_{j=1}^{m} v(a_n, s_j)}{m} \right\}$$

و يتم تحديد القرار طبقا لهذا المعيار نتبع الخطوات التالية:

- ✓حساب القيمة المتوسطة لحالات الطبيعة لكل قرار و تساوي مجموع حالات الطبيعة /عددها
- ✓ إختيار القرار الذي يحقق أفضل قيمة متوسطة.

بالرجوع إلى المثال السابق و حسب معيار لابلاس نجد:

$(a_i$ البدائل $\| s_j$ حالات الطبيعة $)$	s_1	s_2	s_3	s_4	مجموع عوائد كل قرار $\sum_{j=1}^{4} v(a_i, s_j)$	الوسط الحسابي لعوائد كل قرار $\frac{\sum_{j=1}^{4} v(a_i, s_j)}{4}$
a_1	40	60	90	20	210	52.5
a_2	70	60	30	50	210	52.5
a_3	60	60	80	70	270	67.5
a_4	10	70	40	60	180	45.0

$$\max_j\{52{,}5{,}67{,}5{,}45\} = 67{,}5$$

و حيث أن أفضل عائد متوسط هو 67.5 إذن يكون القرار الأفضل هو البديل الثالث حسب لابلاس.

VII.6.معيار هرويكز "hurwicz" المعيار الموزون أو المعيار الواقعي

هذا المعيار وسيط بين معيار $(maxi\ min)$ و $(maxi\ max)$ ، حيث يعتمد صانع القرار في تفائله أو تشاؤمه على العدد α الذي يعبر عن درجة التفاؤل حيث : $0 \leq \alpha \leq 1$ ، أما $(1-\alpha)$ فيعبر عن درجة التشاؤم و بالتالي فإن القرار المتخذ وفق هذا المعيار يكتب وفق القانون التالي:

$$\max_j \left(\alpha B_i + (1-\alpha) b_i\right)$$

حيث b_i يمثل أدنى نتيجة للبديل a_i مع جميع حالات الطبيعة .

و B_i يمثل أكبر نتيجة للبديل a_i مع جميع حالات الطبيعة.

و يتم تحديد القرار طبقا لهذا المعيار نتبع الخطوات التالية:

✓إعطاء وزن ترجيحي لكل قرار للمعيار المتفائل و ليكن α

✓ إعطاء وزن ترجيحي لكل قرار للمعيار المتشائم و ليكن $1\text{-}\alpha$ حيث مجموع الوزنين يساوي 1.

✓ضرب المعيار المتفائل (أفضل عائد مقابل لكل قرار) $\times\ \alpha$.

✓ ضرب المعيار المتشائم (أدنى عائد مقابل لكل قرار) $\times\ 1\text{-}\alpha$.

✓ جمع نتيجة الخطوتين السابقتين.

✓ إختيار القرار الذي يكون حاصل الجمع له هو الأفضل (الأقل في حالة مصفوفة خسائر).

بالرجوع إلى معطيات المثال السابق وعلى افتراض أن α=0,6 نجد:

$(a_i$البدائل $\mid s_j$ حالات الطبيعة $)$	s_1	s_2	s_3	s_4	وزن البديل المتفائل 0.6	وزن البديل المتشائم 0.4	ضرب المعيار المتفائل في الوزن	ضرب المعيار المتشائم في الوزن	مجموع حاصل الضرب
a_1	40	60	90	20	90	20	54	8	62
a_2	70	60	30	50	70	30	42	12	54
a_3	60	60	80	70	80	60	48	24	72
a_4	10	70	40	60	70	10	42	4	46

و حيث أن أفضل عائد متوسط هو 72 إذن يكون القرار الأفضل هو القرار الثالث حسب هرويكز.

VII.7.معيار نقطة منتصف الطريق

و هو يعتبر حالة خاصة من طريقة هورتس حيث تتساوى الأوزان التي تعطى لكل من المعيارين أي 0.5 لكل منهما و يتم تحديد القرار المناسب طبقا للخطوات التالية:

✓إيجاد معيار التفائل (أفضل عائد مقابل لكل قرار)

- ✓ إيجاد معيار التشائم (أدنى عائد مقابل لكل قرار)
- ✓ حساب مجموع المعيارين
- ✓ قسمة مجموع المعيارين على 2
- ✓ إختيار القرار الذي يكون ناتج قسمته هو الأفضل (الأقل في حالة مصفوفة خسائر).

يعطى هذا المعيار بالعلاقة التالية:

$$\max_j \left(\frac{B_i + b_i}{2}\right)$$

حيث b_i يمثل أدنى نتيجة للبديل a_i مع جميع حالات الطبيعة .

و B_i يمثل أكبر نتيجة للبديل a_i مع جميع حالات الطبيعة.

بالرجوع إلى المثال السابق نجد أن القرار الأفضل وفق هذا المعيار كمايلي:

(حالات الطبيعة s_j | البدائل a_i)	s_1	s_2	s_3	s_4	المعيار المتفائل	المعيار المتشائم	مجموع المعيارين	متوسط المجموع
a_1	40	60	90	20	90	20	110	55
a_2	70	60	30	50	70	30	100	50
a_3	60	60	80	70	80	60	140	70
a_4	10	70	40	60	70	10	80	40

و حيث أن أفضل عائد متوسط قدره 70 إذن يكون القرار الأفضل هو البديل الثالث حسب طريقة منتصف الطريق.

VIII. إتخاذ القرار في حالة تعدد الأهداف

نفرض أن إحدى شركات التصنيع يرغب في وضع خطة سنوية بدلالة ثلاثة أهداف هي:

(1) زيادة الأرباح (2) زيادة حصتها السوقية (3) زيادة المبيعات ، يلاحظ أن هدف الربح يمكن قياسه بالوحدات النقدية ، ويمكن قياس الحصة السوقية بالنسبة المئوية من حجم السوق بينما زيادة المبيعات يمكن قياسها بالكمية أو النسبة المئوية .

نفرض أن إدارة الشركة وضعت ثلاثة سياسات مختلفة للوصول إلى تلك الأهداف المعينة ، و لغرض ذلك قامت بتكوين مصفوفة عوائد و لتحديد السياسة المثلى عليها تعيين أوزان نسبية لكل من

الأهداف الثلاثة و من ثم تحديد تحديد المنفعة الناتجة عن كل سياسة متبعة و إختار السياسة التي تعظم المنفعة و تحسب المنفعة عن طريق مجموع ضرب كل هدف في الوزن المرجح له

VIII.1.تطبيق

يبين الجدول التالي الأوزان النسبية لثلاثة أهداف و المطلوب تحديد السياسة المثلى

الاهداف و أوزانها	عائد الإستثمارات	الزيادة في الحصة السوقية	الزيادة في المبيعات	المنفعة
الأوزان	0.2	0.5	0.3	
سياسة 1	7	4	9	6.1
سياسة 2	3	6	7	5.7
سياسة 3	5	5	10	6.5

السياسة المثلى هي السياسة الثالثة لأنها تحقق أكبر منفعة و قدرها 6.5

IX.–تمارين مقترحة

IX.1. يجب أن يقرر بائع محل بيع قمصان تنس كم سيكون حجم طلب الشراء الذي سيقوم به في موسم الصيف المقبل إن أوامر الشراء الممكنة بالنسبة لنوع محدد من القمصان هي 100 قميص كلفته الوحدوية مقدارها 10دج ، أو 200 قميص كلفته الوحدوية 9 دج أو 300 قميص كلفته الوحدوية 8.5 دج ، يبلغ سعر مبيع القميص الواحد 12 دج ، أما القمصان التي لا تباع خلال موسم الصيف ، فتباع لاحقا بنصف سعرها ، يقرر مالك المحل أن يكون الطلب على هذا النوع من القمصان إما 100 أو 150 أو 200 ، وهو طبعا لا يستطيع بيع قمصان أكثر مما يخزن ، إذا كان المخزون أقل من الطلب فهناك تكلفة فقدان الزبائن تقدر بـ 0.5 لكل قميص ، كما يجب على المالك أن يقوم بطلب الشراء اليوم كي تصله القمصان في فصل الصيف ، ولا يمكنه الانتظار ليتصرف حسب ما سوف يمون عليه الطلب فيما بعد ، كما لا يمكنه تقديم أكثر من طلب شراء واحد.

المطلوب:

إيجاد القرار المناسب حسب معايير القرار البسيطة؟

IX.2. حدد القرارات المفضلة في ظل معايير القرار البسيطة التالية:

تلقى أحد المزارعين في الخريف 50000 دج نظير محصول البرتقال الذي سيحصد في بداية العام التالي ، إذا قبل هذا المزارع العرض ، فإن النقود تكون له بصرف النظر عن جودة وكمية المحصول ، وإذا لم يقبل المزارع العرض ، فإنه يجب أن يبيع المحصول في السوق بعد حصاده ، وتحت الظروف العادية فإن

المزارع يتوقع الحصول على 70000 دج نظير محصوله من السوق ، و إذا تعرض المحصول للصقيع ، فإن جزءا كبيرا من المحصول سيتلف ، ويتوقع الحصول على 15000 دج من السوق.

IX.3.طلب اتخاذ قرار بتحديد عدد الوحدات السكنية اللازم انشائها في منطقة صحراوية ذات عدد محدود من السكان ،حيث أعد مخطط لتعميريها و تأهيلها بالسكان خاصة الذين يعيشون في مناطق عشوائية تعتبر بؤر إجرامية و بعد الدراسة الميدانية للجوانب الفنية و المالية تم التوصل إلى المعلومات التالية :

متوسط تكلفة الوحدة السكنية = 100000 دج

العمر الافتراضي للوحدة السكنية = 10 سنوات

الايجار الشهري للوحدة السكنية 2000 دج ، و يتوقع أن تؤجر في المتوسط 10 أشهر في السنة .

في حالة عدم تأجير الوحدة للاستخدام كوحدة سكنية ، فبدل أن تترك خالية فإنها سوف تستخدم إستخدام آخر (مكاتب _ مخازن) بإيجار شهري 250 دج طيلة أشهر السنة .

عدد الوحدات السكنية المقترح إنشائها لهذه المنطقة تتراوح بين 100 وحدة إلى 500 وحدة سكنية (نفرض أن كل مجمع سكني يضم 100 وحدة سكنية) و يتوقف دلك على مدى نجاح خطة التعمير و المقدرة على جذب سكان المناطق العشوائية إلى تلك المنطقة الجديدة .

المطلوب:

تحديد عدد الوحدات الواجب إنشاؤها باستخدام معايير القرار البسيطة؟

IX.4.يريد صندوق الطلاب تحديد عدد الحواسيب التي يرغب شرائها لبيعها لطلاب الجامعة ،يكلف الحاسوب بسعر الجملة 80000 دج و يبيعه الصندوق بمبلغ 110000 دج للحاسوب ، يعتقد القائم على الصندوق أن الطلب سيكون بين 1 و 4 حواسب، و كل حاسوب لا يباع يوضع عليه خصم بـ 50% و سيباع حالا ، في حالة نقص عدد الحواسيب عن الطلب سيفقد الصندوق 10000 دج عن كل نقص لحاسوب .

المطلوب:

كون مصفوفة القرار لهذه المشكلة و أوجد القرار المناسب حسب المعايير البسيطة التي درستها؟

الفصل الثاني: إتخاذ القرارات في ظل ظروف المخاطرة

I.إتخاذ القرار في ظرف المخاطرة Decision Making Under Risk

تتحقق حالة المخاطرة عندما لا تتوافر المعلومات التامة عن المشكلة المراد اتخاذ قرار لحلها أو الهدف المراد تحقيقه ، ومن ثم يتم تقدير احتمالات حدوث كل حالة من حالات الطبيعة التى يتوقع أن تسود فى المستقبل ، بمعنى أن التوزيع الاحتمالي لحالات الطبيعة يكون معروف و بالتالى فإن نظرية الاحتمال تلعب دورا هاما فى تقدير التوزيع الاحتمالي المتوقع لحالات الطبيعة.

ولاتخاذ القرار فى ظل ظروف المخاطرة يجب أن تتوفر لمتخذ القرار مايلي:

- مجموعة البدائل المتاحة والممكنة الحدوث وتسمى Actions أو Alternatives.
- حالات الطبيعة المتوقع أن تسود States of nature واحتمال حدوث كل حالة طبيعة.
- العائدات الشرطية لكل بديل Conditional payoff.

قبل التطرق للطرق التي يستعملها متخذ القرار عندما يرغب بإتخاذ قرار معين تحت ظروف المخاطرة يجب التذكير ببعض المفاهيم الخاصة بالاحتمالات.

II.مراجعة في الإحتمالات

1.II.مفهوم الاحتمال

تعددت مفاهيم الاحتمال باختلاف الفترات الزمنية و اختلاف الكتاب و سنحاول سرد تعريفين كما يلي:

التعريف الأول

يعبر احتمال ظهور الحادث A أثناء تجربة عشوائية عن النسبة بين عدد أحداث الظاهرة قيد الدراسة A إلى عدد الأحداث الممكنة على أن يكون لكل الأحداث نفس الحظ في الظهور .

مثال

نرمي زهرة نرد غير متحيزة مرقمة من 1 إلى 6 ، ما هو احتمال ظهور رقم زوجي.

الحل

نفرض أن A هو عدد الحلات الملائمة لظهور عدد زوجي و S عدد الحلات الممكنة لظهور أي رقم من 1 إلى 6.

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$A = \{2,4,6\}$$

نرمز احتمال ظهور عدد زوجي بالرمز $P(A)$

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

التعريف الثاني

يعرف الاحتمال $P(A)$ على أنه القيمة النهائية للتكرار النسي لظهور الحادث A .

مثال

الجدول التالي يمثل عدد و نوع السيارات التي تم استيرادها من دولة ما حلا السنة N

الفترة نوع السيارة	الثلاثي الأول	الثلاثي الثاني	الثلاثي الثالث	المجموع
سيارة نفعية	**37**	**20**	**18**	**75**
سيارة سياحية	**10**	**10**	**5**	**25**
المجموع	**47**	**30**	**23**	**100**

احتمال شراء سيارة نفعية خلال العام هو

$$\frac{75}{100} = 0{,}75$$

احتمال شراء سيارة سياحية خلال الثلاثي الناني هو

$$\frac{30}{100} = 0{,}3$$

II.2.بديهيات الاحتمال

1. الاحتمال $P(A)$ للحادث A في تجربة عشوائية هو عدد حقيقي معلوم و غير سالب يتراوح بين الصفر و الواحد.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

2. إذا كان الحادث A يحوي كل عناصر التجربة العشوائية ، فإنه يكون بمثابة الحادث المؤكد

$$P(A) = 1$$

3. إذا كان الحدثان A و B منفصلان في تجربة عشوائية فإن احتمال حدوث اتحادهما هو:

$$P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$$

II.3.القيمة المتوقعة: Expected Value

إذا كان x متغيرا عشوائيا له دالة التوزيع الاحتمالي $p(x)$ والتي تحقق الشرطين الآتيين:

$$0 \leq p(x) \leq 1$$

$$\sum p(x) = 1$$

فإن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي x ، ويرمز لها بالرمز $E(x)$ تعرف كالآتي:

$$\boldsymbol{E(x) = \frac{\sum xp(x)}{\sum p(x)} = \sum x\, p(x)}$$

لأن: $\sum p(x) = 1$

II.4.قاعدة جمع الاحتمالات

إذا كان الحدثان A و B يمثلان حدثين ما لتجربة عشوائية فإن احتمال حدوث اتحادهما هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

II.5.الاحتمال الشرطي

عندما يكون احتمال ظهور أو حدوث حادث معين B مرتبط بحدوث حادث أخر A نسمي هذا الاحتمال بالاحتمال الشرطي و نرمز له بالرمز $P(B / A)$ و نقرأه كما يلي : الاحتمال الشرطي للحادث B بشرط حدوث A مسبقا أو في نفس الوقت مع B. فهو يحسب وفق العلاقة التالية:

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

أما الاحتمال الشرطي للحادث A بشرط حدوث B مسبقا أو في نفس الوقت مع A. فهو يحسب وفق العلاقة التالية:

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

II.6.قانون ضرب الاحتمالات

من خلال قاعدة الاحتمال الشرطي نستخلص قانون ضرب الاحتمالات ، و منه أيضا يمكن حساب احتمال ظهور الحادث A و أيضا الحادث B أي احتمال حادث التقاطع كما يلي:

$$P(A \cap B) = P(B / A) \times P(A)$$

أو

$$P(A \cap B) = P(A / B) \times P(B)$$

في حالة كون الحدثين مستقلين يصبح الاحتمال الشرطي كما يلي:

$$P(B / A) = P(B)$$
$$P(A / B) = P(A)$$

و عليه يكون قانون ضرب الاحتمالات كما يلي:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

II.7.تعميم قانون ضرب الاحتمال

يمكن تعميم القانون السابق كما يلي:

فإذ اكان لدينا A_1, A_2, A_3 ثلاثة أحداث فيكون قانو ضرب الاحتمال كما يلي:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P(A_1 / A_2).P(A_3 / A_1 \cap A_2)$$

حيث: $P(A_3 / A_1 \cap A_2)$ هو احتمال ظهور A_3 الشرطي بفرض ظهور الحادثتين A_1, A_2 مسبقا.

II.8.تطبيق

ينتج مصنع حياكة أقمشة صوفية بمعدل 90 قطعة يوميا ، 20% من الأقمصة ينتج به تشوه ، ينوي زبون شراء المنتوج ، و لكنه يشترط مسبقا اجراء اختبار على عينة منه . سحبت ثلاثة أقمصة عشوائيا القميص تلو الآخر للاختبار ، كما تقرر مسبقا أنه لم تصحبه السلعة من المصنع إلا إذا تأكد أن القطع الثلاثة المسحوبة صالحة كلها و ليس بها أي عطب .

ما هو احتمال أن تكون الاقمصة الثلاثة منتجة دون تشوه و صالحة للاستعمال؟

الحل

نرمز بالحرف A_i إلى الحادث أنه عند سحب رقم i قد تم سحب قميص صحيح و دون تشوه. و عليه يكون إذا احتمال الحادث A_1 الذي يمثل سحب قميص صحيح في المرة الأولى هو:

$$P(A_1) = \frac{90 - 18}{90} = \frac{72}{90}$$

احتمال الحادث A_2 الذي يمثل سحب قميص صحيح في المرة الثانية هو:

$$P(A_2 / A_1) = \frac{72-1}{90-1} = \frac{71}{89}$$

احتمال الحادث A_3 الذي يمثل سحب قميص صحيح في المرة الثالثة هو:

$$P(A_3 / A_1 \cap A_2) = \frac{72-2}{90-2} = \frac{70}{88}$$

و يكون الحادث يمثل سحب ثلاثة قطع صالحة بعد ثلاثة عمليات سحب متتالية هو:

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ ويحدث باحتمال:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{72}{90}.\frac{71}{89}.\frac{70}{88} = 0{,}5076$$

II.9.قانون الاحتمال الشامل

لتكن $A_1, A_2, \dots, A_n$ أحداثا متنافية فيما بينها و التي تشكل في مجموعها فضاء الأحداث S أي أن:

$$P(A_i \cap A_j) = \emptyset$$

حيث: $(i = j = 1, \dots n)$

و أن

$$S = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$$

إن المجموعة $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ و التي لها نفس الخصائص لتوزيع n حادثا ، لنفرض E_i عبارة عن حادث ما يتشكل من اجتماع عدد من الأحداث عندئذ يمكن صياغة علاقته الرياضية كما يلي:

$$E = (E \cap A_1) \cup (E \cap A_2) \cup \dots \cup (E \cap A_n)$$

بالاستعانة بقانون الضرب نستنتج أن:

$$P(E) = P(E / A_1) \times P(A_1) + P(E / A_2) \times P(A_2) + \dots + P(E / A_n) \times P(A_n)$$

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E / A_i) \times P(A_i)$$

هذا القانون نسميه قانون الاحتمال الشامل

II.10.تطبيق

اقتنى صاحب مصنع ثلاث ماكنات عصرية آلية للحياكة و استغنى عن الاولى التقليدية فأصبح انتاجه اليومي 1000 قطعة من الاقمصة الصوفية ، انتاج الماكنة M_1 هو 100 قطعة بنسبة تشوه تساوي 5%

، و انتاج الماكنة M_2 هو 400 قطعة بنسبة تشوه تساوي 4% أما ، انتاج الماكنة M_3 هو 500 قطعة بنسبة تشوه تساوي 2% ، قام ذات يوم صاحب المصنع باختيار قميص من مجموع إنتاج الماكنات الثلاث اليومي و فحصه ما هو احتمال أن تكون القطعة المختارة دون عيب؟

نرمز بـ A_i إلى حادثة أن القطعة المختارة كانت من انتاج M_i ، و بـ E إلى الحادث أن القطعة المسحوبة دون عيب ، و عليه نحسب

$$P(A_1) = \frac{100}{1000} = 0{,}1, P(A_2) = \frac{400}{1000} = 0{,}4, P(A_3) = \frac{500}{1000} = 0{,}5$$

$$P(E / A_1) = \frac{5}{100} = 0{,}05, P(E / A_2) = \frac{4}{100} = 0{,}04, P(E / A_3) = \frac{2}{100} = 0{,}02$$

$$P(E) = \sum_{i=1}^{3} P(E / A_i) \times P(A_i)$$

$$P(E) = 0{,}1 \times 0{,}05 + 0{,}4 \times 0{,}04 + 0{,}5 \times 0{,}02 = 0{,}031$$

II.11.نظرية بايز

لاشتقاق نظرية بايز نعتبر أن S موزعة إلى A_i حادثا حيث $(j = 1, \dots n)$ حسب قانون ضرب الاحتمالات يكون

$$P(A_i \cap E) = P(E / A_i) \times P(A_i)$$
$$P(A_i \cap B) = P(A_i / E) \times P(E)$$

بالمساواة ينتج

$$P(A_i / E) \times P(E) = P(E / A_i) \times P(A_i)$$

$$P(A_i / B) = \frac{P(E / A_i) \times P(A_i)}{P(E)}$$

طبقا لصيغة الاحتمال الشامل و حيث أن :

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E / A_i) \times P(A_i)$$

فإننا نستنتج:

$$P(A_i / E) = \frac{P(E / A_i) \times P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E / A_i) \times P(A_i)}$$

بالرجوع إلى التطبيق السابق السابق نختار قميص من الإنتاج اليومي للمكينات بصورة عشوائية ، نشترط أن يكون القميص هذا صالحا .

السؤال المطروح الآن ما هو احتمال أن يكون القميص المسحوب عشوائيا منتوجا أصله الماكنة M_1 ؟ وما هو احتمال أن يكون المنتوج الماكنة M_2 وما هو احتمال أن يكون المنتوج الماكنة M_3؟

إذن المطلوب هو حساب الاحتمالات $P(A_1 / E)$ و$P(A_2 / E)$ و $P(A_3 / E)$.

$$P(A_1 / E) = \frac{P(E / A_1) \times P(A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(E / A_i) \times P(A_i)}$$

$$= \frac{0{,}1 \times 0{,}05}{0{,}1 \times 0{,}05 + 0{,}4 \times 0{,}04 + 0{,}5 \times 0{,}02} = 0{,}16$$

$$P(A_2 / E) = \frac{0{,}4 \times 0{,}04}{0{,}031} = 0{,}52$$

$$P(A_3 / E) = \frac{0{,}5 \times 0{,}02}{0{,}031} = 0{,}32$$

II.12.تطبيق

نفرض أن لدينا أربعة علب تحتوي على نوعين من الأقلام ، أقلام بجودة عالية ، و أقلام رديئة ، عدد الأقلام و نوعها في كل علبة موضحة في الجدول التالي :

نوع الأقلام / العلب	أقلام بجودة عالية	أقلام رديئة	المجموع
العلبة الأولى	80	20	100
العلبة الثانية	30	70	100
العلبة الثالثة	50	50	100
العلبة الرابعة	40	60	100

نختار و بدون تميز أحد العلب و نأخذ منها قلمين عشوائيا ، فنجد أن نوع الأقلام كان قلم بجودة عالية ، قلم رديء.

ما هو احتمال أن العلبة المسحوبة هي العلبة الأولى بشرط أن تكون الأقلام المسحوبة من نوعين مختلفين؟

الحل:

1- نبحث التشكيلات الممكنة لأنواع الأقلام التي تمثل تبديلة بحيث $n = 2$ ، و منه عدد التشكيلات الممكنة هو:

$$n! = 2 \times 1 = 2$$

(جيد، ،رديء) ، (رديء ، جيد) .

2- نقوم بحساب الاحتمالات الاولية التي تمثل سحب قلم جيد و آخر رديء من أي علبة من أربعة علب.

نرمز لحادثة سحب نوعين من الأقلام بـ E و $P(E / A_1)$ لاحتمال سحب قلمين مختلفين من العلبة الأولى ، أما احتمال أن العلبة المسحوبة هي الأولى بشرط أن تكون الأقلام المسحوبة منها مختلفة النوع ، فنرمز له بالرمز $P(A_1 / E)$.

$$P(E / A_1) = \frac{80}{100} \times \frac{20}{100} + \frac{20}{100} \times \frac{80}{100} = \frac{8}{25}$$

$$P(E / A_2) = \frac{30}{100} \times \frac{70}{100} + \frac{70}{100} \times \frac{30}{100} = \frac{21}{50}$$

$$P(E / A_3) = \frac{50}{100} \times \frac{50}{100} + \frac{50}{100} \times \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$P(E / A_4) = \frac{40}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{60}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{12}{25}$$

إن الاحتمالات الأولية التي حسبناها سابقا تتأثر باحتمالات سحب العلب (الاحتمالات الاولية لسحب أي علبة) كما سيتضح في الخطوة الثالثة.

3-حساب الإحتمالات المتقاطعة

العلب	احتمال سحب قلمين أحدهما جيد والآخر رديء من كل علبة $P(E / A_i)$	احتمال سحب العلب $P(A_i)$	الاحتمال المرجح = (احتمال سحب قلمين أحدهما جيد والآخر رديء× احتمال سحب الصندوق $P(E / A_i) \times P(A_i)$
A_1	$\frac{8}{25}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{8}{25} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{25}$
A_2	$\frac{21}{50}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{21}{50} \times \frac{1}{4} = \frac{21}{200}$
A_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$
A_4	$\frac{12}{25}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{12}{25} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{25}$
المجموع			$\frac{33}{100}$

لدينا حسب نظرية بايز:

$$P(A_1 / E) = \frac{P(E / A_1) \times P(A_1)}{\sum_{i=1}^{4} P(E / A_i) \times P(A_i)}$$

بالتطبيق العددي نجد:

$$P(A_1 / E) = \frac{\frac{2}{25}}{\frac{33}{100}} = \frac{8}{33}$$

III.القيمة المالية المتوقعة: Expected Monetary Value

تستخدم هذه الطريقة في حالة التخطيط للمدى الطويل للقرارات التي تتكرر باستمرار ، حيث تناسب متخذ القرار المحايد بالنسبة للمخاطر، وتعبر عن مجموع ضرب كل بديل a_i في احتمال حدوث حالة الطبيعة s_j و من ثم اختيار القيمة المالية المتوقعة الأكبر في حالة مصفوفة أرباح أو القيمة المالية الأصغر في حالة مصفوفة خسائر ، يمكن تقديم قانون القيمة المالية المتوقعة كما يلي:

$$\boldsymbol{EMV(a_i) = \frac{\sum_j p(s_j) \times V(a_i, s_j)}{\sum_j p(s_j)} = \sum_j p(s_j) \times V(a_i, s_j)}$$

$$\sum_j p(s_j) = 1 \quad \text{لأن:}$$

يمكن إستخدام هذه الطريقة وفق الخطوات التالية:

1. حساب الربح المتوقع من قرار البديل ، وذلك بوزن أو تقيم كل ربح من الأرباح الموجودة في الصف التي تشير إلى القرار ، وذلك بضربها في إحتمالات وقوع الأحداث المختلفة ، ثم تجميع القيم الناتجة.
2. إختيار القرار الذي يعطي أكبر عائد متوقع (أقل خسارة متوقعة في حالة مصفوفة خسائر).

IV. جدول خسارة الفرصة البديلة: Opportunity Loss Table

يستخدم جدول خسارة الفرصة البديلة كأسلوب آخر لاتخاذ القرار المناسب لحل المشاكل التي تنطوي على عدد من البدائل المتاحة ، وهو أسلوب بديل لجدول العوائد. أي أنه لحل مشكلة ما باختيار البديل الأفضل من بين عدة بدائل فإننا نقوم بإعداد جدول يتضمن خسارة الفرصة البديلة لكل بديل من البدائل المتاحة يسمى جدول خسارة الفرصة البديلة ، ثم نقوم بحساب القيمة المتوقعة لخسارة الفرصة البديلة لكل بديل متاح أمام متخذ القرار، وفى هذه الحالة فإن البديل الذى يحقق أقل قيمة متوقعة لخسارة الفرصة البديلة فإنه يكون البديل الأمثل.

يمكن بناء جدول يهتم بالخسائر و ذلك عن طريق تحديد أكبر قيمة (أقل قيمة في حالة مصفوفة خسائر) في كل عمود من الأعمدة المكونة لجدول الأرباح ثم نقوم بطرح بقية القيم من القيم الكبيرة و يكون الفرق ممثلا لما يسمى بخسارة الفرص الضائعة (راجع الفصل الأول).

يعطى قانون القيمة المتوقعة في حالة جدول خسارة الفرصة البديلة كما يلي:

$$EOL(a_i) = \sum_j p(s_j) \times R(a_i, s_j)$$

EOL : خسارة الفرصة البديلة المتوقعة Expected **Opportunity Loss**

$R(a_i, s_j)$: قيمة خسارة الفرصة البديلة للبديل a_i عند حدوث حالة الطبيعة s_j.

$p(s_j)$: إحتمال حدوث حالة الطبيعة s_j .

ملاحظة

إيجاد القيمة المتوقعة سواء باستخدام جدول العوائد أو جدول خسارة الفرصة البديلة فإنها تعطي نفس القرار

V. المعلومات التامة: Perfect Information

رأينا أنه عند استخدام معيار القيمة المتوقعة للعوائد ، وكذا معيار القيمة المتوقعة لخسارة الفرصة للمفاضلة بين البدائل المتاحة أمام متخذ القرار ، كان اتخاذ القرار محاطا بمخاطرة ما. بمعنى أن متخذ القرار لم يكن يعلم يقينا أي من حالات الطبيعة سوف يسود في المستقبل ، وبالتالي فإنه كان يعتمد أساسا على التوزيع الاحتمالي للعوائد الخاصة بكل بديل لحساب القيمة المتوقعة لهذه العوائد. من ناحية أخرى فإنه إذا توفرت معلومات إضافية Additional information حول عملية اتخاذ القرار ؛ كأن يتوفر أمام متخذ القرار معلومات كافية وتامة عن حالة الطبيعة التي سوف تسود في المستقبل ، فإن هذه المعلومات سوف تساعد متخذ القرار عل اتخاذ القرار الذى يحقق أكبر منفعة ممكنة. وبالتتالي فإن لهذه المعلومات قيمة وفائدة عظيمة لمتخذ القرار حيث تساعده على اتخذ القرار الأمثل الذى يحقق أقصى قيمة متوقعة للعوائد أو أدنى قيمة متوقعة لخسارة الفرصة البديلة وذلك في ضوء توافر المعلومات الكاملة حول المشكلة قيد الدراسة والمطلوب اتخاذ قرار بشأنها.

وكما أن لهذه المعلومات من فائدة عظيمة لمتخذ القرار ، فإن هناك تكلفة يتم إنفاقها للحصول على هذه المعلومات، حيث يمكن الحصول عليها من مستشارين متخصصين consultants Specialized أو من نتائج وتوصيات البحوث والتجارب السابقة.

V.1. قيمة المعلومات التامة Value of Perfect Information

يمكن تعريف قيمة المعلومات التامة بأنها الفرق بين القيمة المتوقعة للعوائد للبديل الأمثل بمعلومات تامة (في ظل ظروف التأكد) و القيمة المتوقعة للعوائد في ظل ظروف المخاطرة. وتجدر الإشارة هنا أنه يمكن حساب القيمة المتوقعة للعوائد في ظل ظروف التأكد (في وجود معلومات تامة) إذا كان معلوم لدى متخذ القرار حالة الطبيعة التي سوف تسود في المستقبل.

القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة $(EVPI)$ = القيمة المتوقعة في حالة التأكد $(ERPI)$ – القيمة المتوقعة في حالة عدم التأكد $(EREV)$

$$EVPI = ERPI - EREV$$

حيث:

Expected Return with Perfect Information :ERPI
Expected Return of the EV Criterion :EREV

على متخذ القرار أن يقارن بين تكلفة الحصول على المعلومات المؤكدة مع ما يضيفه وجودها من عوائد و من ثم يقرر إستخدامها من عدمه.

V.2.القيمة المتوقعة في حالة التأكد $(ERPI)$

بما أن متخذ القرار يمكنه الحصول على معلومات مؤكدة من مصادره الخاصة بخصوص الأحداث المستقبلية و بالتالي يمكن تحديد الخطوات التي تتحدد بها القيمة المتوقعة في حالة التأكد كالآتي:

- يتم تحديد أعلى عائد من كل حدث ، على افتراض أن هناك عائدا مؤكدا بوقوع ذالك الحدث.
- يتم ضرب كل عائد من هذه العوائد في احتمالات وقوع حالات الطبيعة.
- جمع القيم المحسوبة في الخطوة السابقة ، و تسمى القيمة الناتجة العائد المتوقع في حالة التأكد (معلومات كاملة).

V.3.القيمة المتوقعة في حالة عدم التأكد $(EREV)$

تمثل أكبر قيمة متوقعة في حالة مصفوفة أرباح أو أقل قيمة متوقعة في حالة مصفوفة خسارة

$$EREV = max\ EMV(a_i)$$

في حالة مصفوفة خسارة

$$EREV = min\ EMV(a_i)$$

V.4.تطبيق

تريد شركة كبرى شراء آلة جديدة وأمامها بديلان للمفاضلة بينهما:

البديل الأول: شراء آلة ذات طاقة إنتاجية عالية (M_1) ، تكلفتها الاستثمارية 400 ألف وحدة نقدية.

البديل الثاني: شراء آلة ذات طاقة إنتاجية منخفضة (M_2) ، تكلفتها الاستثمارية 210 ألف وحدة نقدية.

فإذا كانت القيمة الحالية للتدفقات النقدية المتوقعة لهاتين الآلتين ، وكذا التوزيع الاحتمالي لهذه التدفقات كما هي موضحة بالجدول الآتي:

حالات الطبيعة	الاحتمال	البدائل المتاحة	
		الآلة M_1	الآلة M_2
الطلب مرتفع	0.50	850000	340000
الطلب متوسط	0.30	250000	170000
الطلب منخفض	0.20	100000	100000

فأي الآلتين تنصح الشركة بشرائها وذلك في ضوء البيانات المتاحة ؟ وأي البديلين أكثر خطورة ؟

للمفاضلة بين هاتين الآلتين سوف نستخدم معيار القيمة المتوقعة للعوائد وكذا معيار القيمة المتوقعة لخسارة الفرصة البديلة ومن ثم اتخاذ قرار باختيار الآلة التي تحقق أكبر قيمة متوقعة للعوائد أو أقل قيمة متوقعة لخسارة الفرصة البديلة. ولكن قبل أن نبدأ يجب أولا أن نوجد صافي القيمة الحالية للتدفقات النقدية (العوائد) لكل بديل من البديلين المتاحين أمام متخذ القرار.

البديل الأول: شراء الآلة M_1

صافي القيمة الحالية للتدفقات النقدية (العوائد) = تكلفة شراء الآلة M_1 – القيمة الحالية للتدفقات النقدية

حالات الطبيعة	الاحتمال	العوائد
الطلب مرتفع	0.50	450000 = 400000 – 850000
الطلب متوسط	0.30	150000 - = 400000 – 250000
الطلب منخفض	0.20	300000 - = 400000 – 100000

البديل الثاني: شراء الآلة M_2

صافي القيمة الحالية للتدفقات النقدية (العوائد) = تكلفة شراء الآلة M_2 – القيمة الحالية للتدفقات النقدية

حالات الطبيعة	الاحتمال	العوائد
الطلب مرتفع	0.50	130000 = 210000 – 340000
الطلب متوسط	0.30	40000 - = 210000 – 17000
الطلب منخفض	0.20	110000 - = 210000 – 100000

والآن يمكن تلخيص العوائد الخاص بالبديلين معا في الجدول الآتي:

حالات الطبيعة	الاحتمال	البدائل المتاحة	
		الآلة M_1	الآلة M_2
الطلب مرتفع	0.50	450000	130000
الطلب متوسط	0.30	300000-	40000 -
الطلب منخفض	0.20	150000-	110000-

أولا: المفاضلة بين البديلين باستخدام معيار القيمة المتوقعة للعوائد

القيمة المتوقعة للعوائد للبديل الأول

$$EMV(a_1) = 45000 \times 0{,}5 + (-150000) \times 0{,}3 + (-30000) \times 0{,}2 = 120000$$

القيمة المتوقع للعوائد للبديل الثاني

$$EMV(a_2) = 130000 \times 0{,}5 + (-40000) \times 0{,}3 + (-110000) \times 0{,}2 = 31000$$

وحيث أن القيمة المتوقعة للعوائد للبديل الأول (120000 وحدة نقدية) أكبر من القيمة المتوقعة للعوائد للبديل الثاني (31000 وحدة نقدية) فإنه ينصح بشراء الآلة M_2) بتكلفة استثمارية 400000 وحدة نقدية.

$$EREV = 120000$$

ثانيا: المفاضلة بين الآلتين باستخدام معيار القيمة المتوقعة لخسارة الفرصة البديلة

قبل أن نستخدم معيار القيمة المتوقعة لخسارة الفرصة البديلة للمفاضلة بين البديلين المتاحين ، يجب علينا أولا أن نحسب خسارة الفرصة البديلة لكل بديل في حال تحقق كل حالة من حالات الطبيعة الثلاث.

جدول خسارة الفرصة البديلة

Opportunity Loss Table

حالات الطبيعة	الاحتمال	خسارة الفرصة البديلة	
		شراء الآلة M_1	شراء الآلة M_2
الطلب مرتفع	0.50	0	320000
الطلب متوسط	0.30	110000	0
الطلب منخفض	0.20	190000	0

القيمة المتوقعة لخسارة الفرصة البديلة للبديل الأول

$$EOL(a_1) = 0 \times 0{,}5 + 110000 \times 0{,}3 + 190000 \times 0{,}2 = 71000$$

القيمة المتوقعة لخسارة الفرصة البديلة للبديل الثاني

$$EOL(a_2) = 320000 \times 0{,}5 + 0 \times 0{,}3 + 0 \times 0{,}2 = 160000$$

وحيث أن القيمة المتوقعة لخسارة الفرصة البديلة للبديل الأول (71000 وحدة نقدية) أقل من القيمة المتوقعة لخسارة الفرصة البديلة للبديل الثاني (160000 وحدة نقدية) ، فإنه ينصح بشراء الآلة (M_1) بتكلفة استثمارية 400000 وحدة نقدية.

ثالثا: القيمة المتوقعة للعائد في حالة التأكد

$$ERPI = 450000 \times 0{,}5 + (-40000) \times 0{,}3 + (-110000) \times 0{,}2 = 191000$$

قيمة المعلومات التامة = القيمة المتوقعة للعائد بمعلومات تامة – القيمة المتوقعة للعائد في ظل ظروف المخاطرة.

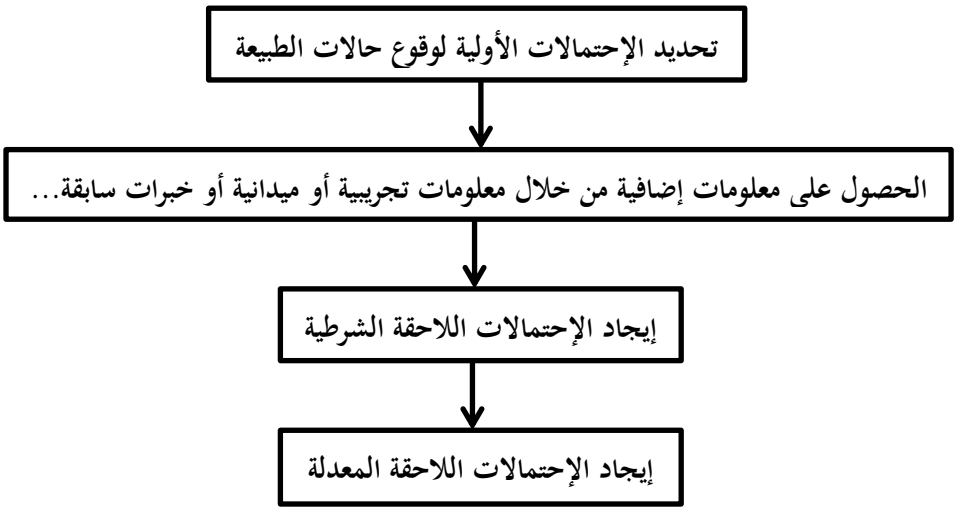
$$EVPI = ERPI - EREV$$
$$EVPI = 191000 - 120000 = 71000$$

نلاحظ هنا أيضا أن قيمة المعلومات التامة تساوى أقل قيمة متوقعة لخسارة الفرصة البديلة (71000 وحدة نقدية).

VI. القيمة المتوقعة في حالة وجود معلومات إضافية

في بعض الأحيان قد تكون المعلومات عن الاحتمالات الأولية لوقوع حالات الطبيعة لدى متخذ القرار غير دقيقة أو تظهر لديه معطيات أو متغيرات جديدة تؤدي به إلى تعديل احتمالاته الحالية من خلال

القيام بعملية تعديل للتقديرات الاحتمالية بما يتفق و نسب النجاح و الفشل في التقديرات السابقة و بالتالي يلجأ إلى نظرية بايز التي تبحث في حساب صحة الفروض أو تصحيح و تعديل الإحتمالات الأولية بناءا على معلومات تجريبية أو ميدانية ولكي يتم ذلك يجب إتباع الخطوات التالية:



لتوضيح كيفية تطبيق نظرية بايز في حساب القيمة المتوقعة نقدم التطبيق (1-1) التالي:

أرادت الإدارة استبدال سياراتها بسيارات أحدث و تتميز بشكل حضاري يتلاءم مع هيئة و سمعة الادارة يدعى مورد السيارات الجديدة ان هذه السيارات سوف توفر كثيرا للإدارة خلال فترة استخدامها يشك القسم الفني للسيارات بالإدارة في رأي المورد ، و بذلك توفرت لدى الادارة ثلاث أراء

الرأي الأول :إذا كان ادعاء المورد صحيح فإن الإدارة ستوفر 2 مليون وحدة نقد و هذا الرأي احتماله 0, 25.

الرأي الثاني : إذا كان رأى القسم الفني في الادارة صحيح فإن الادارة سوف تخسر 450 الف وحدة نقدية و هذا الرأي احتماله 0,35.

الرأي الثالث : اذا كان ادعاء المورد غير صحيح و رأى القسم الفني غير صحيح فإن الادارة سوف لا تكسب أو تخسر باحتمال 0, 4.

حتى تطمئن الادارة اقترحت اجراء تجربة و هي تأجير 5 سيارات و تجربتهم (إستخدام عادى لمدة شهرين)، هذا سيكلف الادارة 50 الف وحدة نقدية .

المطلوب: تحديد البديل الأفضل من بين البدائل التالية :

البديل الأول : استبدال السيارات دون إجراء التجربة .

البديل الثاني : عدم استبدال السيارات و الإبقاء على السيارات الموجودة .

البديل الثالث : اجراء التجربة ثم استبدال السيارات .

البديل الرابع : اجراء التجربة ثم عدم استبدال السيارات .

و قد توفرت المعلومات التالية أمام الإدارة عن الاحتمالات المقدرة لحالات الطبيعة طبقا للحالات الفعلية و احتمال النجاح موضحة في الجدول التالي:

حالات الطبيعة الفعلية الاحتمالات المقدرة لحالات الطبيعة	توفير	تعادل	خسارة
توفير	0,7	0,3	0,1
تعادل	0,2	0,5	0,4
خسارة	0,1	0,2	0,5

الحل

حساب القيمة المتوقعة قبل الحصول على المعلومات الإضافية (إجراء التجربة)

الاحتمالات الأولية $P(A_i)$	**0,25**	**0,4**	**0,35**	$EMV(a_i)$
حالات الطبيعة الفعلية البديل	توفير	تعادل	خسارة	
استبدال السيارات	2000000	0	- 450000	342500
عدم استبدال السيارات	0	0	0	0

في حالة عدم إجراء التجربة و بالاعتماد على الاحتمالات الأولية يكون قرار الاستبدال هو الأفضل و يوفر للإدارة مبلغ 342500 وحدة نقدية .

حساب القيمة المتوقعة بعد الحصول على المعلومات الإضافية (إجراء التجربة)

الاحتمالات الأولية $P(A_i)$	**0,25**	**0,4**	**0,35**
حالات الطبيعية الفعلية **احتمالات الطبيعة $P(E / A_i)$**	**توفير**	**تعادل**	**خسارة**
احتمال (توفير/ توفير – تعادل – خسارة)	0,7	0,3	0,1
احتمال (تعادل/ توفير – تعادل – خسارة)	0,2	0,5	0,4
احتمال (خسارة/ توفير – تعادل – خسارة)	0,1	0,2	0,5

حساب الاحتمالات المتقاطعة $P(A_i \cap E) = P(E / A_i) \times P(A_i)$

حالات الطبيعة **الاحتمالات المتقاطعة $P(A_i \cap E)$**	**توفير**	**تعادل**	**خسارة**	**المجموع**
احتمال (توفير)	0,175 = 0,7 × 0,25	0,12 = 0,3 × 0,4	0,035 = 0,1 × 0,35	0,33
احتمال (تعادل)	0,05 = 0,2 × 0,25	0,2 = 0,5 × 0,4	0,4 = 0,1 × 0,35	0,39
احتمال (خسارة)	0,025 = 0,1 × 0,25	0,08= 0,2 × 0,4	0,175= 0,5 × 0,35	0,28
المجموع				1

حساب $P(A_i / E)$

حالات الطبيعية	**توفير**	**تعادل**	**خسارة**	**المجموع**
احتمال (توفير)	0,5303	0,3636	0,1061	1
احتمال (تعادل)	0,1282	0,5128	0,3590	1
احتمال (خسارة)	0,0893	0,2857	0,6250	1

حساب القيم المتوقعة لكل حالة من حالات الطبيعة طبقا للاحتمالات اللاحقة التي تم حسابها في حالة كون الطبيعة توفير .

$EMV(a_i)$	0,1061	0,3636	0,5303	الاحتمالات اللاحقة المعدلة $P(A_i / E)$
	خسارة	تعادل	توفير	حالات الطبيعة البديل
962855	-500000	-50000	1950000	استبدال السيارات بعد اجراء التجربة
-50000	-50000	-50000	-50000	عدم استبدال السيارات بعد اجراء التجربة

و هذا يدل على أنه لو هناك تأكد من أن حالة الطبيعة توفير فإن قرار استبدال السيارات يوفر 962855 وحدة نقدية.

حالة الطبيعة تعادل

$EMV(a_i)$	0,3590	0,5128	0,1282	الاحتمالات اللاحقة المعدلة $P(A_i / E)$
	خسارة	تعادل	توفير	حالات الطبيعة البديل
44850	-500000	-50000	1950000	استبدال السيارات بعد اجراء التجربة
-50000	-50000	-50000	-50000	عدم استبدال السيارات بعد اجراء التجربة

و هذا يدل على أنه لو هناك تأكد من أن حالة الطبيعة تعادل فإن قرار استبدال السيارات يوفر 44850 وحدة نقدية.

حالة الطبيعة خسارة

الاحتمالات اللاحقة المعدلة $P(A_i / E)$	0,0893	0,2857	0,6250	$EMV(a_i)$
حالات الطبيعة / البديل	توفير	تعادل	خسارة	
استبدال السيارات بعد اجراء التجربة	1950000	-50000	-500000	-152650
عدم استبدال السيارات بعد اجراء التجربة	-50000	-50000	-50000	-50000

و هذا يدل على أنه لو هناك تأكد من أن حالة الطبيعة خسارة فإن قرار عدم استبدال السيارات يحقق أقل خسارة تقدر بـ 50000 وحدة نقدية.

و حيث أنه في حالة المخاطرة لا ندرك أي من حالات الطبيعية ستتحقق فإنه يجب حساب القيمة المتوقعة في ظل حالات الطبيعة المختلفة كما يلي:

الاحتمالات اللاحقة المعدلة $P(A_i / E)$	0,33	0,39	0,28	$EMV(a_i)$
حالات الطبيعة / البديل	توفير	تعادل	خسارة	
استبدال السيارات بعد اجراء التجربة	962855	44850	-152650	292491.65
عدم استبدال السيارات بعد اجراء التجربة	-50000	-50000	-50000	-50000

مما سبق يتضح التالي :

- استبدال السيارات دون اجراء التجربة يحقق توفير قدره 342500 وحدة نقدية .
- عدم استبدال السيارات دون اجراء التجربة يحقق تعادل مقداره 0 وحدة نقد لا مكسب او خسارة .

- استبدال السيارة بعد اجراء التجربة يحقق توفير قدره 292491.65 وحدة نقدية.
- عدم استبدال السيارات دون اجراء التجربة يحقق خسارة مقدارها (5000 –) وحدة نقدية .

و بالتالي يكون القرار استبدال السيارات دون اجراء التجربة

VII. شجرة القرارات

هناك طريقة بديلة لهيكلة مسألة بشكل تصوري هو المخطط الشجري أو شجرة القرار تمثل شجرة القرار تتالي الأفعال و النتائج زمنيا حسب ظهورها في مسألة القرار النهائي المبني على معلومات مسبقة ، يمثل الجزء الأول منها (العقدة المربعة) الفعل الذي إختاره صانع القرار و يمثل الجزء الثاني (العقدة الدائرية) الحدث كما تمثل الأرقام الموجودة عند أطراف الفروع النهائية الأرباح أو الخسائر، تدعى عملية إتخاذ القرار بهذه الطريقة بالإستقراء التراجعي.

إن شجرة القرار هي إذا عبارة عن أداة لوصف مشكلة القرار ، وإن كان وصفا جزئيا في بعض الأحيان ، تسمح بمتابعة إمدادات كل خيار أو بديل أو قرار من حيث الحالات المستقبلية المختلفة المرتبطة به و العوائد المتوقعة بالنسبة لكل حالة.

تفيد شجرة القرار في تصور المشكلة و بالتالي إختيار أفضل القرارات ، و هي مستعملة بصورة واسعة بسبب بساطتها غير أنه في حالة كون عدد البدائل الممكنة كبيرا ، و كذلك عدد الحالات المستقبلية المنبثقة عن كل ظرف، و إن كانت مثل هذه الحالات نادرة ، يصبح رسم الشجرة صعبا و معقدا ، و بالتالي لن تكون هذه الأداة مناسبة.

من خلال ما سبق يمكن تعريف شجرة القرار على أنها عبارة عن مخطط تلخيصي لمشكلة قرار ما ، تضم مختلف البدائل و الحالات المستقبلية الممكنة ، مرفقة بالقيم المتوقعة لكل ظرف ، كما ترفق عادة باحتمالات حدوث كل ظرف ، و الهدف منها مساعدة متخذ القرار على حصر جوانب المشكلة ، و من ثم ترتيب البدائل وفق أهميتها المنبثقة من المعيار المعتمد و تستخدم شجرة القرار باتباع الخطوات التالية:

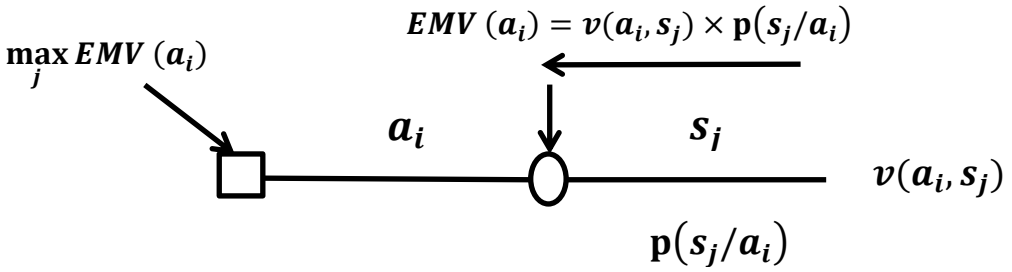
- تحديد مختلف البدائل الممكنة a_i و هي نقاط القرار و يرمز لها بمربع صغير □
- تحديد مختلف الحالات و الظروف المستقبلية الممكنة لكل بديل s_j و يرمز لها بدائرة صغيرة O.
- وضع القيم المتوقعة بالنسبة لكل بديل a_i و كل حالة $v(a_i, s_j)$ و ذلك بعد ضرب العوائد أو التكاليف في إحتمالات وقوعها و تتم عملية حساب القيم المتوقعة من يمين الشجرة إلى يسارها

أي من الأمام إلى الخلف و وضع كل قيمة متوقعة أمام كل عقدة تابعة لها إلى غاية حساب القيم المتوقعة لكل بديل

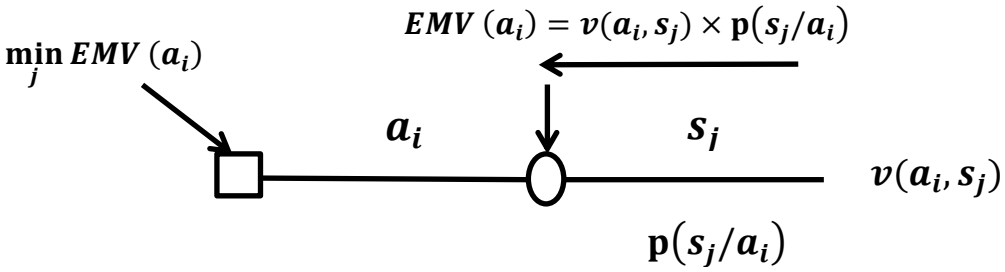
- تحليل ومقارنة مختلف القيم المتوقعة بغرض إتخاذ القرار أي اختيار البديل الأفضل الذي يعظم القيمة المتوقعة للأرباح أو يقلل الخسارة و نضعه أمام عقدة القرار.

يمكن توضيح ما سبق من خلال الشكل التالي:

حالة أرباح



حالة خسائر



ينبغي أن تحقق شجرة القرار مجموعة من الخصائص إقترحها Keeney and Raiffa للحكم على شجرة القرار و هي :

- **الشمولية** : أي تكون الشجرة كاملة بحيث تتضمن كافة البدائل و ظروف الطبيعة.
- **العملية**: و يبرز هذا المعيار إذا كان المستوى الأسفل للشجرة هام بالنسبة لمتخذ القرار للمقارنة فيما بين البدائل الموجودة فيه ، فإذا صعب على متخذ القرار إجراء مفاضلة تصبح الشجرة غير عملية.
- **القابلية للتجزئة**: يقضي هذا المعيار بأن الحكم على كفائة تنفيذ بديل ما يمكن أن يتم بصفة مستقلة عن تنفيذ البدائل الأخرى.

- **عدم التكرار** : و يعني عدم تكرار نفس البدائل أو الأحداث في نفس الشجرة ، فالتكرار غير مفيد ن بل و إنه سيصعب من عملية إتخاذ القرار.
- **الحجم الأقل** : إذ أنه كلما كانت الشجرة كبيرة الحجم صعبت عملية التحليل ، ولا بد من الحرص على وضع شجرة أقل حجما و لكنها شاملة.

VII.1.تطبيق

شركة صناعية تريد إنتاج المنتوج "X" و أمامها ثلاثة بدائل هي:

- الإنتاج بطاقة عالية
- الإنتاج بطاقة متوسطة
- الإنتاج بطاقة منخفضة

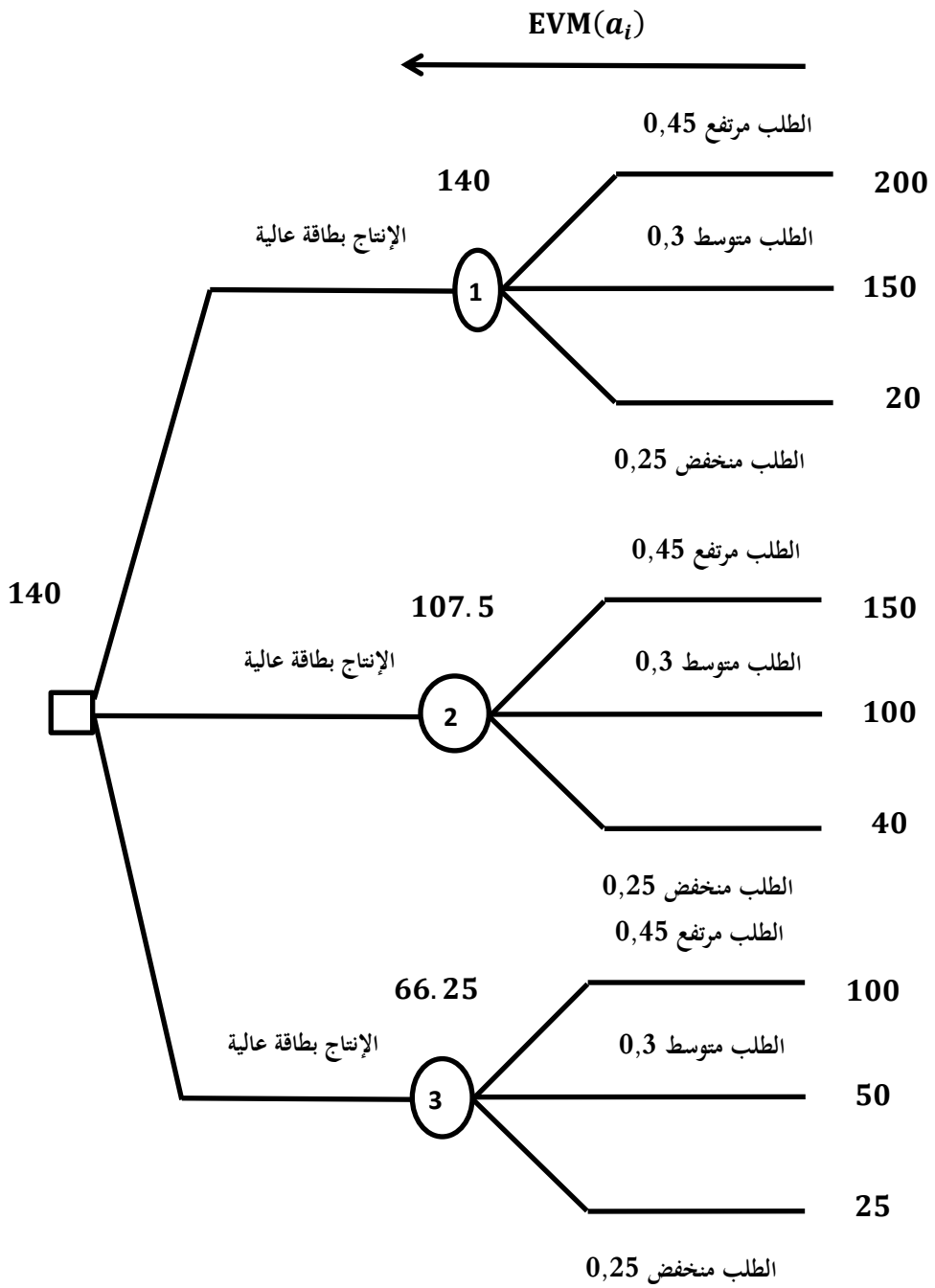
و تتوقع الشركة أن الطلب على منتوجها سيكون عالي بنسبة 45% و متوسط بنسبة 30% أما إحتمال أن يكون الطلب منخفض هو 25%.

الجدول التالي يوضح الأرباح المحتملة لكل بديل في ظل حالات الطبيعة المختلفة.

حالات الطبيعة **البدائل**	الطلب مرتفع	الطلب متوسط	الطلب منخفض
الإنتاج بطاقة عالية	200	150	20
الإنتاج بطاقة متوسطة	150	100	40
الإنتاج بطاقة منخفضة	100	50	25

المطلوب :رسم شجرة القرار و اتخاذ القرار المناسب.

الحل

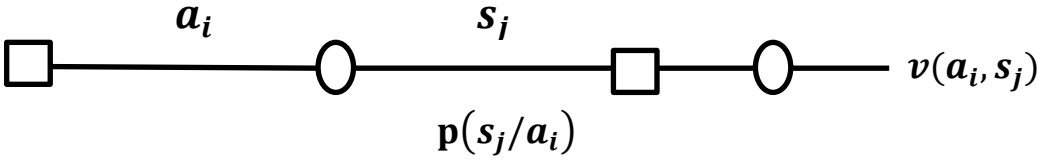


القرار هو الإنتاج بطاقة عالية لأنه يحقق أكبر قيمة متوقعة هي 140

VIII.القرارات المتتالية

في الواقع قد تكون مجموعة البدائل و حالات الطبيعة محدودتين ، ويمكن أن يتولد عن بديل ما أو حالة ما بدائل وحالات متعاقبة ، حيث يكون عدد البدائل أو الحالات كبير بحيث يجعل المشكلة معقدة و

الشجرة كبيرة الحجم ، عندها يتم إلغاء أو تجاهل البدائل و الحالات التي لا تفيد متخذ القرار و بالتالي تقليص حجم الشجرة و الشكل التالي يوضح حالة القرارات المتتالية



لتوضيح ما سبق نصوغ المثال التالي:

VIII.1.تطبيق

يرغب أحمد في استثمار مبلغ من المال ن وذلك بشراء مصنع ، حيث يرى أن أرباح هذا المصنع ستكون كبيرة إذا تم تسييره بشكل جيد ، فإذا قام بشرائه الآن فإن العائدات ستكون كبيرة في غضون سنتين ، وعندها يمكن بيعه.

يمتلك يوسف و علي جميع أسهم هذا المصنع و يقبلان بيع أسهمهم الآن بسعر مليون دولار أو بيع نصفها الآن و باقي الاسهم يمكن بيعه بعد سنة و يعتمد سعرها على وضعية الأرباح في ذلك الوقت.

يرى أحمد ان البدائل المتاحة أمامه هي:

- شراء جميع أسهم المصنع الآن وبيعها في نهاية السنة الثانية.
- شراء نصف أسهم المصنع الآن مع امكانية شراء الباقي بعد سنة و بيعها جميعا مع نهاية السنة الثانية.
- عدم شراء الباقي و بيع السهم التي اشتريت في نهاية السنة الثانية.
- عدم شراء أي سهم و الاستعاضة عن ذلك بشراء سندات لمدة سنتين.

تتأثر عائدات أحمد بظروف العمل ، فإذا كانت الظروف جيدة في السنة الأولى فيمكن أن تكون سيئة في السنة الثانية و بالعكس. و كل هذه الأحداث يمكن أن تؤثر على قيمة الأرباح عندما يخطط أحمد لبيع الأسهم.

لتعين إحتمالات حالات الطبيعة التي تواجه أحمد ، قام مدير أعماله بإعداد دراسته و خرج بالنتائج التالية:

يبلغ إحتمال أن يكون العمل جيدا في السنة الأولى 60% و أن يكون سيئا 40% ، أما بالنسبة للسنة الثانية ، فإذا كان العمل جيدا في السنة الأولى فإحتمال ان يستمر كذلك في السنة الثانية يبلغ 70% و

إحتمال العكس 30% أما إذا كان العمل سيئا في السنة الاولى فإحتمال أن ينعكس الوضع و يصبح جيدا في السنة الثانية هو 40% و إحتمال ان يبقى على حاله 60%.كما قام مدير أعمال أحمد بحساب القيم الحالية لكل البدائل الممكنة بالإعتماد على العائدات المتوقعة لكل نتيجة ممكنة و هي مبينة في الجدول التالي:

البدائل	ظروف العمل		القيمة الحالية (الربح$1000)
	السنة الأولى	السنة الثانية	
شراء 100%دفعة واحدة	جيدة	جيدة	800
	جيدة	سيئة	-500
	سيئة	جيدة	600
	سيئة	سيئة	-700
شراء 50%دفعة واحدة	جيدة	جيدة	300
	جيدة	سيئة	0
	سيئة	جيدة	100
	سيئة	سيئة	-100
شراء 50%على دفعتين	جيدة	جيدة	-600
	جيدة	سيئة	600
	سيئة	جيدة	500
	سيئة	سيئة	-400
شراء سندات			50

جلس أحمد يراجع المعلومات التي أعدها مدير أعماله حيث يتوجب عليه أن يقرر خلال الأيام القليلة القادمة و إلا سيفقد فرصة شراء المصنع لأن يوسف و علي تلقوا عروض بيع آخرى.

المطلوب:

مساعدة أحمد على إتخاذ القرار المناسب بإستخدام

1. القيمة المتوقعة
2. شجرة القرارات.

الحل:

يمتلك أحمد ست بدائل هم :

- شراء 100% من الأسهم دفعة واحدة .
- شراء 50% من الأسهم في السنة الأولى و شراء 50% المتبقية مهما كانت ظروف العمل في السنة الأولى جيدة أم سيئة.
- شراء 50% من الأسهم في السنة الأولى و إذا كانت السنة الأولى جيدة شراء الأسهم المتبقية و إذا كانت سيئة عدم الشراء.
- شراء 50% من الأسهم في السنة الأولى و إذا كانت السنة الأولى جيدة عدم الشراء و إذا كانت سيئة شراء الأسهم المتبقية.
- شراء 50% من الأسهم في السنة الأولى و إذا كانت السنة الأولى جيدة أو سيئة عدم الشراء.
- شراء سندات.

بينما هناك أربع حالات للطبيعة هم :

✓ سنة أولى جيدة و سنة ثانية جيدة

✓ سنة أولى جيدة و سنة ثانية سيئة

✓ سنة أولى سيئة و سنة ثانية جيدة

✓ سنة أولى سيئة و سنة ثانية سيئة

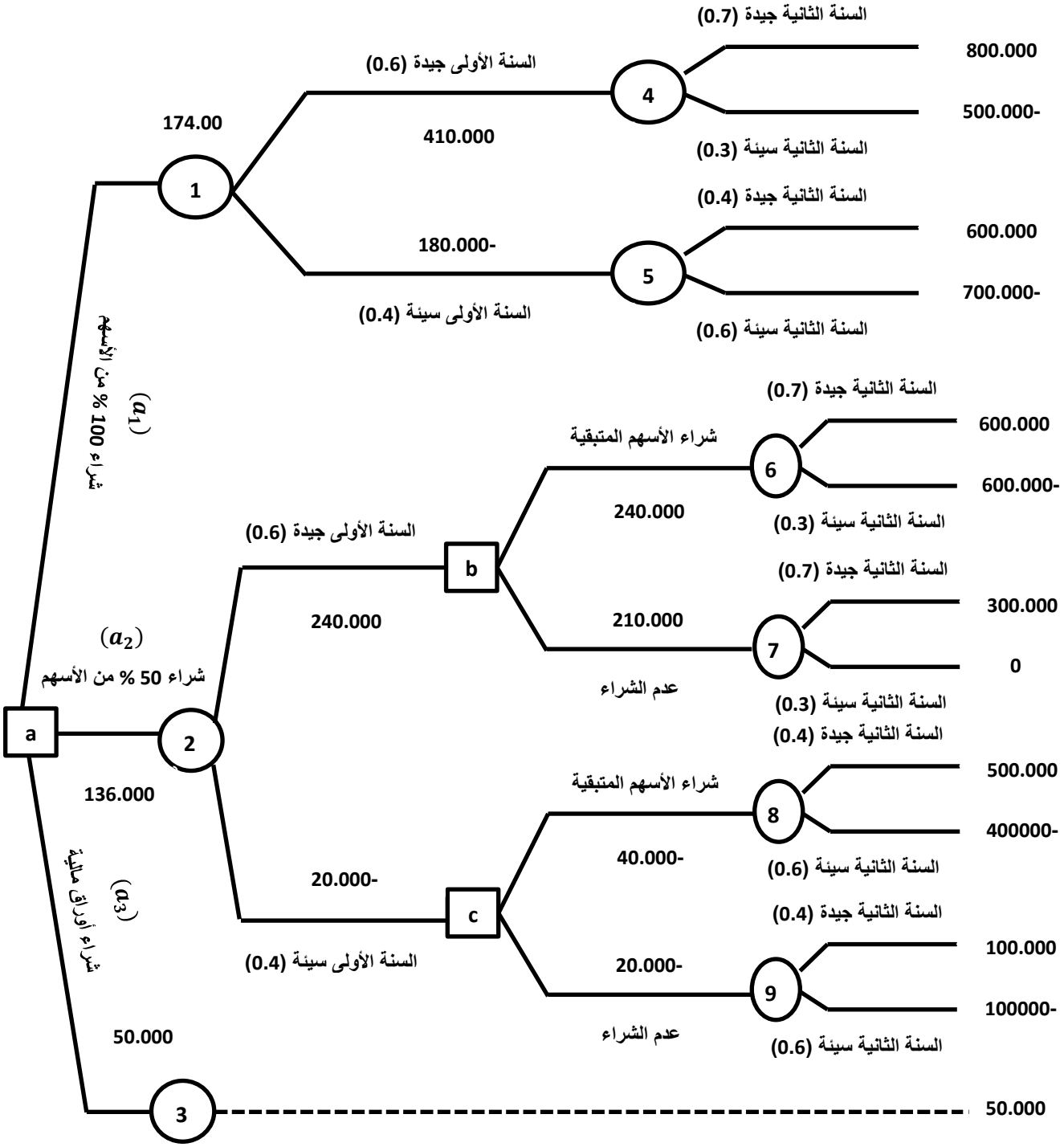
حساب القيمة المتوقعة في عند إختيار أي بديل

شراء 100% من الأسهم دفعة واحدة .				
السنة الأولى (1)	السنة الثانية (2)	الإحتمال المشترك (3)=(2)×(1)	الايرادات (4)	القيمة الحالية الصافية المتوقعة (5)=(3)×(4)
0.6	0.7	0.42	800.000	336.000
0.6	0.3	0.18	500.000-	90.000-
0.4	0.4	0.16	600.000	96.000
0.4	0.6	0.24	700.000-	168.000-
الإجمالي		1.0		174.000

السنة الأولى (1)	السنة الثانية (2)	الإحتمال المشترك (3)=(2)×(1)	الايرادات (4)	القيمة الحالية الصافية المتوقعة (5)=(3)×(4)
الإستراتيجية 1 : شراء الأسهم المتبقية مهما كانت ظروف العمل في السنة الأولى جيدة أم سيئة				
0.6	0.7	0.42	600.000	252.000
0.6	0.3	0.18	600.000-	108.000-
0.4	0.4	0.16	500.000	80.000
0.4	0.6	0.24	400.000-	96.000-
الإجمالي		1.0		128.000
الإستراتيجية 2 : إذا كانت السنة الأولى جيدة شراء الأسهم المتبقية و إذا كانت سيئة عدم الشراء				
0.6	0.7	0.42	600.000	252.000
0.6	0.3	0.18	600.000-	108.000-
0.4	0.4	0.16	100.000	16.000
0.4	0.6	0.24	100.000-	24.000-
الإجمالي		1.0		136.000
الإستراتيجية 3 : إذا كانت السنة الأولى جيدة عدم الشراء و إذا كانت سيئة شراء الأسهم المتبقية				
0.6	0.7	0.42	300.000	126.000
0.6	0.3	0.18	0	0
0.4	0.4	0.16	500.000	80.000
0.4	0.6	0.24	400.000-	96.000-
الإجمالي		1.0		110.000
الإستراتيجية 4 : إذا كانت السنة الأولى جيدة أو سيئة عدم الشراء				
0.6	0.7	0.42	300.000	126.000
0.6	0.3	0.18	0	0
0.4	0.4	0.16	100.000	16.000
0.4	0.6	0.24	100.000-	24.000-
الإجمالي		1.0		118.000

أفضل قرار هو شراء 100 % من الأسهم لأنه يحقق أكبر قيمة متوقعة 174000

رسم شجرة القرار



أفضل قرار هو شراء 100 % من الأسهم لأنه يحقق أكبر قيمة متوقعة 174000

IX.شجرة القرار في حالة الحصول على معلومات إضافية

في هذه الحالة نقوم بتعديل إحتمالات حدوث حلات الطبيعة كما رأيناها سابقا في معيار القيمة المتوقعة و من ثم نقوم برسم شجرة القرار و إتخاذ القرار المناسب و لتوضيح ذلك نقدم المثال التالي:

IX.1.تطبيق

مركز بحوث قرر طباعة البحوث التي يقوم بها الباحثين العاملين به و بيعها للجهات العلمية المتخصصة وقد توقع المركز أن يحقق ربحا مقداره 120000 دج إذا كان الطلب مرتفع على الكتب التي سوف يصدرها أما إذا كان الطلب منخفض و لم يستطع تسويق تلك البحوث فإنه سوف يحقق خسارة تقدر بمبلغ 60000 دج ، و كان أمام المركز ثلاثة بدائل كما يلي:

البديل الأول: القيام بحملة إعلانية و دعائية للمركز في وسائل الإعلام و الصحافة بتكلفة تقدر بـ 5000 دج و ستؤدي إلى رفع العائد إلى 150000 دج في حالة الطلب المرتفع و خسارة بـ 50000 في حالة الطلب المنخفض و الإحتمالات الثانوية الناتجة عن الحملة الإعلانية و الدعائية موضحة في الجدول التالي:

حالات الطبيعة / الاحتمالات	طلب مرتفع	طلب منخفض
طلب مرتفع	0 ,9	0,3
طلب منخفض	0,1	0,7

البديل الثاني: إجراء دراسة ميدانية إستطلاعية و عقد مؤتمر للتعريف بالمركز و مطبوعاته بتكلفة تقدر بـ 20000 دج و ستؤدي إلى رفع العائد إلى 180000 دج في حالة الطلب المرتفع و خسارة بـ 40000 في حالة الطلب المنخفض و الإحتمالات الثانوية الناتجة عن الدراسة الميدانية الإستطلاعية موضحة في الجدول التالي:

حالات الطبيعة / الاحتمالات	طلب مرتفع	طلب منخفض
طلب مرتفع	0 ,8	0,4
طلب منخفض	0,2	0,6

البديل الثالث: عدم القيام بأي حملة إعلانية أو دراسة ميدانية

المطلوب:

إذا علمت أن الإحتمال الأولي لحالة الطبيعة "الطلب مرتفع" هو 0,6

1. إيجاد القرار المناسب بإستخدام معيار القيمة المتوقعة.
2. إيجاد القرار المناسب بإستخدام شجرة القرار.

الحل

1. إختيار البديل الأمثل وفق معيار القيمة المتوقعة

القيمة المتوقعة في حالة القيام بحملة إعلانية و دعائية

حالات الطبيعة / الاحتمالات	طلب مرتفع 0 ,6	طلب منخفض 0 ,4
طلب مرتفع	0 ,9	0,3
طلب منخفض	0,1	0,7

حساب الإحتمالات المتقاطعة

حالات الطبيعة / الاحتمالات	طلب مرتفع 0 ,6	طلب منخفض 0 ,4	المجموع
طلب مرتفع	0 ,54	0,12	0,66
طلب منخفض	0,06	0,28	0,34

حساب الإحتمالات المعدلة

حالات الطبيعة / الاحتمالات	طلب مرتفع 0 ,6	طلب منخفض 0 ,4	المجموع
طلب مرتفع	0,8181	0,1819	1
طلب منخفض	0,1765	0,8235	1

حساب القيمة المتوقعة في حالة كون الطبيعة طلب مرتفع

$$EVM = (150000 \times 0{,}8181) + (0{,}1819 \times -50000) = 113620$$

حساب القيمة المتوقعة في حالة كون الطبيعة طلب منخفض

$$EVM = (150000 \times 0{,}1765) + (0{,}8235 \times -50000) = -14700$$

القيمة المتوقعة في حالة حدوث حالتي الطبيعة معا أي الطلب مرتفع بإحتمال 0.66 و طلب منخفض بإحتمال 0.34 هو:

$$EVM(a_1) = (113620 \times 0{,}66) + (0{,}34 \times -14700) - 5000 = 64991{,}2$$

القيمة المتوقعة في حالة إجراء دراسة ميدانية إستطلاعية و عقد مؤتمر

حالات الطبيعة / الاحتمالات	طلب مرتفع 0 ,6	طلب منخفض 0 ,4
طلب مرتفع	0 ,8	0,4
طلب منخفض	0,2	0,6

حساب الإحتمالات المتقاطعة

حالات الطبيعة / الاحتمالات	طلب مرتفع 0 ,6	طلب منخفض 0 ,4	المجموع
طلب مرتفع	0 ,48	0,16	0,64
طلب منخفض	0,12	0,24	0,36

حساب الإحتمالات المعدلة

حالات الطبيعة / الاحتمالات	طلب مرتفع 0 ,6	طلب منخفض 0 ,4	المجموع
طلب مرتفع	0,75	0,25	1
طلب منخفض	0,3333	0,6667	1

حساب القيمة المتوقعة في حالة كون الطبيعة طلب مرتفع

$$EVM = (180000 \times 0{,}75) + (0{,}25 \times -40000) = 125000$$

حساب القيمة المتوقعة في حالة كون الطبيعة طلب منخفض

$$EVM = (180000 \times 0{,}3333) + (0{,}6667 \times -40000) = 33326$$

القيمة المتوقعة في حالة حدوث حالتي الطبيعة معا أي الطلب مرتفع بإحتمال 0.66 و طلب منخفض بإحتمال 0.34 هو:

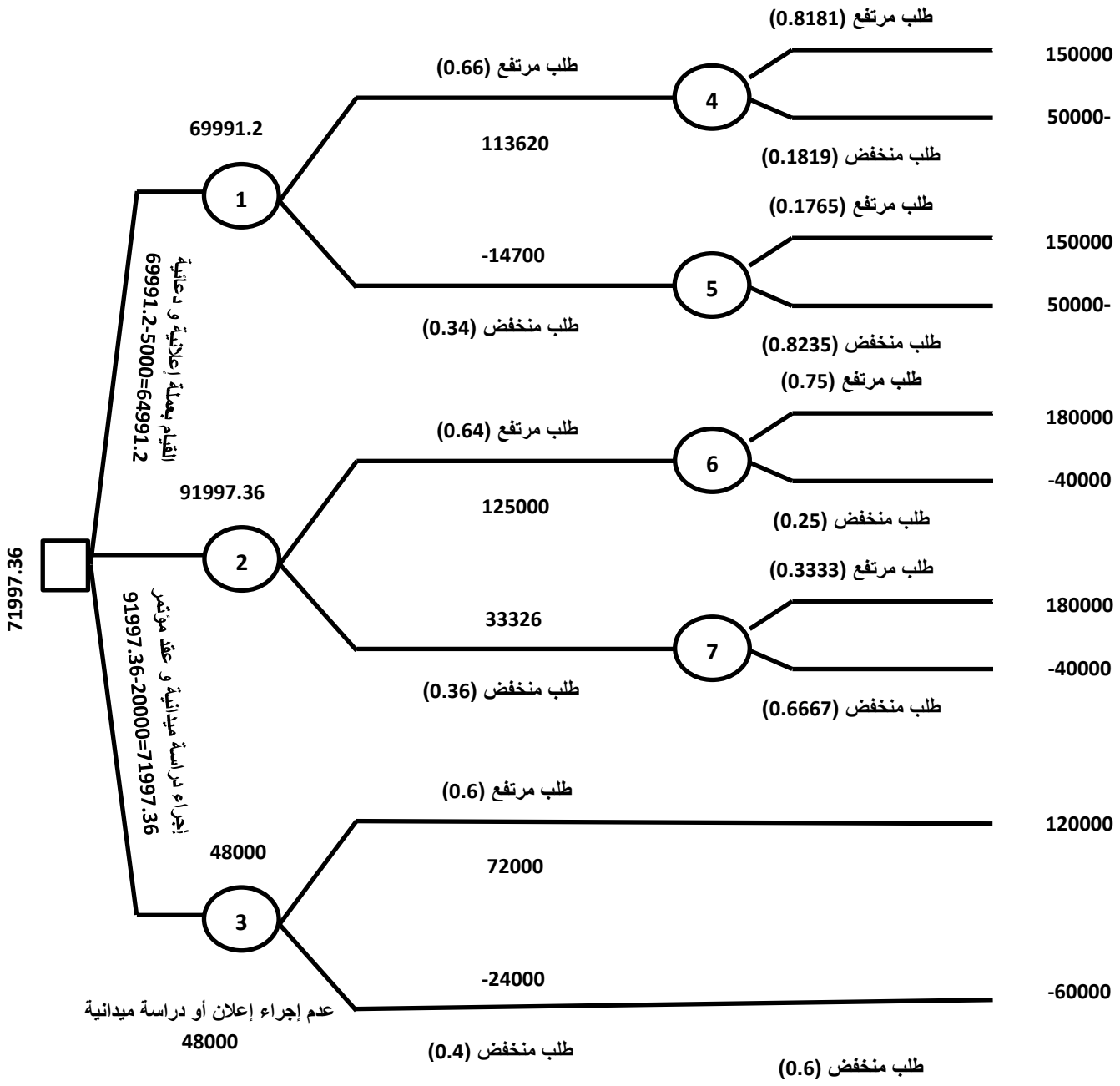
$$EVM(a_2) = (125000 \times 0{,}64) + (0{,}36 \times 33326) - 20000$$
$$= 71997{,}36$$

حساب القيمة المتوقعة في حالة عدم القيام بحملة إعلانية و دعائية أو إجراء دراسة ميدانية إستطلاعية

$$EVM(a_3) = (120000 \times 0{,}6) + (0{,}4 \times -60000) = 48000$$

القرار وفق معيار القيمة المتوقعة هو إجراء دراسة ميدانية إستطلاعية و عقد مؤتمر بعائد يقدر بـ 71997,36.

2. رسم شجرة القرار



القرار وفق شجرة القرار هو إجراء دراسة ميدانية إستطلاعية و عقد مؤتمر بعائد يقدر بـ 71997,36.

X.تمارين مقترحة

1.X.يريد شخص استثمار مبلغ 1100 دج. فإذا توفر لديه ثلاثة بدائل للاستثمار في سوق الأوراق المالية هي:

شراء سهم الشركة A

شراء سهم الشركة B

شراء سهم الشركة C

ويرى هذا الشخص من خلال خبرته أنه إذا كانت الأسعار تميل إلى الارتفاع في سوق الأوراق المالية ، فإنه يتوقع أن يصل سعر سهم الشركة A إلى 2400 دينار في نهاية العام. أما إذا كانت أسعار السوق تميل إلى الانخفاض ، فإنه يتوقع أن يهبط سعر سهم الشركة A إلى 1000 دينار في نهاية العام. والجدول الآتي يبين التدفقات النقدية (العوائد) للبدائل الثلاثة المناظرة لحالات الطبيعة التي من المتوقع أن تسود خلال العام.

جدول التدفقات النقدية

البدائل المتاحة	حالات الطبيعة	
	ارتفاع الأسعار	انخفاض الأسعار
شراء سهم الشركة A	2400	1000
شراء سهم الشركة B	2200	1100
شراء سهم الشركة C	1900	1150

و بناءا على ذلك قام هذا المستثمر بالحصول على بيانات الأسعار للأسهم المتداولة في سوق الأوراق المالية خلال العشر سنوات الماضية وتبين له أن أسعار الأسهم كانت مرتفعة خلال ست سنوات ومنخفضة خلال أربع سنوات. وبالتالي فإنه يمكن تقدير احتمال حدوث ارتفاع في أسعار الأسهم في البورصة خلال العام ليكون 0.6 وبالتالي يكون احتمال انخفاض اسعار الأسهم 0.4 خلال نفس العام.
توفرت لديك البيانات التالية حول أزمة سيولة مست مؤسسة معينة و القرارات التي تتخذ لإنهاء تلك الأزمة و حلات الطبيعة المتوقعة الحدوث و العوائد الناتجة لكل قرار مع كل حالة طبيعة ، و هي عبارة عن قيم معيارية تقديرية كلما كبرت تعني أفضلية القرار.

المطلوب:

1. إختيار البديل الأفضل وفق معيار القيمة المتوقعة بطريقتين؟
2. حساب قيمة المتوقعة من المعلومات الكاملة؟
3. إختيار البديل الأفضل وفق شجرة القرار؟

2.X.توفرت لديك البيانات التالية حول أزمة سيولة مست مؤسسة معينة و القرارات التي تتخذ لإنهاء تلك الأزمة و حالات الطبيعة المتوقعة الحدوث و العوائد الناتجة لكل قرار مع كل حالة طبيعة ، و هي عبارة عن قيم معيارية تقديرية كلما كبرت تعني أفضلية القرار.

حالات الطبيعة / القرارات	أزمة سببها ديون المؤسسة	أزمة سببها المنافسة	أزمة سببها تدهور الاقتصاد
طلب قرض من البنك	70	40	60
طرح أسهم للبيع	50	80	10
تحصيل ديون المؤسسة	10	30	70

جدول الاحتمالات الأولية و الشرطية

الإحتمالات الأولية	0,2	0,5	0,3
حالات الطبيعة / احتمالات حالات الطبيعة	أزمة سببها ديون المؤسسة	أزمة سببها المنافسة	أزمة سببها تدهور الاقتصاد
أزمة سببها ديون المؤسسة	0,6	0,1	0,2
أزمة سببها المنافسة	0,3	0,7	0,2
أزمة سببها تدهور الاقتصاد	0,1	0,2	0,6

المطلوب:

1. إختيار البديل الأفضل وفق معيار القيمة المتوقعة ؟
2. إختيار البديل الأفضل وفق شجرة القرار؟

3.X.أعطيت شركة بترول الفرصة من طرف وزارة الطاقة كي تقوم بعملية تنقيب عن البترول في ارض معينة ، إن عملية التنقيب تكلف الشركة 100000$ و هذه التكلفة لا ترجع للشركة في حالة قيامها بعملية التنقيب و عدم عثورها على البترول ، بناءا على دراسة قام بها الجيولوجيين لهذه الأرض استنتج أن هناك احتمال 0.55 كي تكون الرض تحتوي على البترول أمام الشركة ثلاثة بدائل وهي:

1. أن تقوم بعملية التنقيب على البترول معتمدة على أبحاث الجيولوجيين.
2. أن تقوم بدراسة إضافية للأرض.
3. أن تقوم بعملية التنقيب تماما دون إجراء الدراسة الإضافية للأرض وتكلف الشركة 30000$

إن هذه الدراسة الإضافية لها حالتان ، إما إيجابية وذلك باحتمال 0.6 أو سلبية باحتمال 0.4 ، إذا كانت الدراسة ايجابية فهناك احتمال 0.85 أن تحتوي الأرض على البترول أما إذا كانت سلبية فهناك احتمال 0.1 أن تحتوي الأرض على البترول .

إذا ما قامت الشركة بعملية التنقيب و حصلت على البترول فيقدر العائد الإجمالي للشركة 400000$ يعتزم أحد مصانع الأغذية تقديم خط جديد للأغذية الجاهزة على المستوى الوطني تقدر أرباح الشركة إذا كان المنتج ناجحا بدرجة كبيرة 50 مليون دينار ، و20 مليون دينار إذا كان العمل ناجحا بدرجة معتدلة و، وخسارة 14 مليون دينار إذا لم يكن ناجحا ، وإذا لم تقدم هذه الشركة الخط فإن مصاريف البحث و التطوير تقدر ب3 مليون دينار تحتسب من الخسائر ، وتشير التقديرات أن احتمال النجاح الكبير 10% و النجاح العادي 40% .

قبل تقديم هذا الخط على المستوى الدولي فإن الشركة تختبره على المستوى المحلي و تكلفة هذا الاختبار 1 مليون دينار ، بالرغم ان نتائج هذا الاختبار قد تكون مرضية ، إلا أنها ليست قاطعة و الاعتماد على هذا الاختبار يعطي الاحتمالات الموضحة في الجول التالي:

		نتائج الاختبار تدل على		
		نجاح كبير	نجاح عادي	عدم النجاح
المنتج يحقق	نجاح كبير	0,6	0,4	0
	نجاح عادي	0,2	0,6	0,2
	عدم النجاح	0,1	0,3	0,6

المطلوب:

1. إختيار البديل الأفضل وفق معيار القيمة المتوقعة ؟
2. إختيار البديل الأفضل وفق شجرة القرار؟

4.X.شركة معينة تريد إستبدال ناقلاتها العامة إما الآن أو بعد سنة أو لا تستبدلها و هذا من أجل تحقيق إستراتيجية تضاف إلى أرباح الشركة وجدول العوائد لكل سنة موضح في الآتي:

	السنة الأولى	السنة الثانية	المجموع
إستبدال في السنة الأولى	360	540	900
إستبدال في السنة الثانية	450	360	810
عدم الإستبدال في السنة الثالثة	450	270	720

المطلوب:

1. إختيار البديل الأفضل وفق شجرة القرار؟

الفصل الثالث: شبكات الأعمال

لقد بدأ تطبيق أساليب شبكات الأعمال (Network Techniques) سنة 1958 م في الولايات المتحدة الأمريكية وتم تطويرها عبر السنين، وأصبحت الجداول الشبكية أداة أساسية للجدولة الزمنية و بالأخص في المشاريع الكبرى ، حيث يتم إنشاء شبكة نشاطات تشمل المشروع و تمثل نموذجا أو خطة لإنجاز المشروع كما هو متوقع أن يتم تنفيذه ، و يتم تقدير الوقت اللازم لإتمام كل نشاط في الشبكة و عمل التسلسل المنطقي لهذه النشاطات و إجراء الحسابات التي تؤدي إلى تحديد المدة الزمنية لإتمام المشروع و متى يتوقع لكل نشاط أن يبدأ و ينتهي كما سيتم بيانه لاحقا.

هناك طريقتان متشابهتان من نماذج تقنيات الجداول الزمنية الشبكية ظهر كل منها مستقلا بذاته لكن في نفس التوقيت هما:

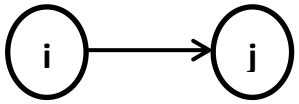
1. طريقة المسار الحرج (Critical Path Method) و تعرف بإختصار بإسم (CPM) .
2. طريقة تقييم و متابعة برامج المشاريع (Program Evaluation and Review Technique) و تعرف بإختصار بإسم بيرت (PERT) .

مع أن كلا الطريقتين ظهرتا بصورة منفصلة عن الأخرى ، إلا أنهما كانتا متشابهتين إلى حد كبير ، حيث أنهما يهدفان أساسا لتحسين التحكم بمجرى العمل من حيث عنصر الوقت . و يتطلب تحليل المشروع المراد إلى تحديد الأعمال الجزئية التي يتكون منها و التي تسمى أنشطة Activities .

I.مصطلحات و مفاهيم متعلقة بشبكات الأعمال

إن التحليل الشبكي يرتكز على عدة مفاهيم مترابطة أهمها:

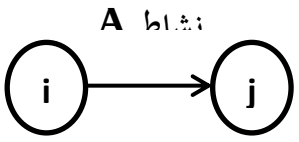
1. **المشروع Project:** عبارة عن مجموعة من الأنشطة والأحداث مرتبة حسب تسلسل منطقي.
2. **شبكة الأعمال Network:** مجموعة من الأنشطة و الأحداث مرتبة بطريقة منطقية لتسلسل الأنشطة.
3. **الحدث Event**:هو عبارة عن الو صول إلى نقطة معينة من الزمن فهو يعبر على انجاز بعض الأنشطة وبداية أنشطة أخرى، فبداية ونهاية كل نشاط يعبر عنها بحدثين حدث البداية وحدث النهاية بينما الحدث لا يحتاج إلى بداية أو نهاية زمنية و يتم تمثيله في الشبكة بواسطة دائرة مرقمة كما هو مبين في الشكل التالي:



حدث نهاية حدث بداية

4. **النشاط Activity** : هو عبارة عن عمل أو جهد يجب انجازه بين حدث سابق وحدث لاحق،و يحتاج إلى موارد لتنفيذه ويتم تمثيله في الشبكة عن طريق سهم يصل بين حدث بدايته وحدث النهايته ، ولا يعبر طول السهم عن زمن النشاط، بل يكتب فوقه زمن إنجاز النشاط .

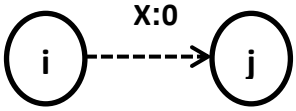
يتم تمثيل النشاط على الشبكة كما يلي:



حدث نهاية حدث بداية

5. **النشاط الوهمي Dummy Activity**: هو النشاط الذي لا يحتاج إلى زمن أو موارد لإتمامه ويستعمل فقط للدلالة على تتابع الأنشطة منطقيا ويرسم بسهم متقطع للمساعدة في التخلص من إشكالات وجود أكثر من نشاط مشترك بين حدثين متتاليين و هذا لتوفير التسلسل المنطقي في الشبكة ، و يتم تمثيله على الشبكة كما يلي:

نشاط وهمي



حدث نهاية حدث بداية

II. إعتبارات يجب مراعتها عند بناء شبكة الأعمال

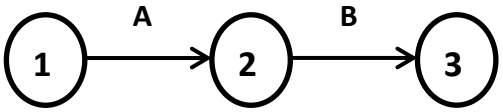
إن بناء شبكة أعمال في ظل النظام الموجه للأحداث يخضع لقواعد معينة يجب مراعاتها عند رسمها ، وتتمثل هذه القواعد فيما يلي:

1. يجب أن تبدأ شبكة الأعمال بحدث واحد فقط هو حدث البداية و يجب أن تنتهي أيضا بحدث واحد فقط يسمى حدث النهاية.

2. التحديد الدقيق للأنشطة التي يتضمنها المشروع و ترتيب هذه الأنشطة بشكل يعكس التتابع الفني و الترتيب المنطقي للاعمال أو المهام المختلفة التي يتضمنها المشروع حيث يتعين عند تحديد كل نشاط على الشبكة ضرورة التعرف على النشاط أو الأنشطة التي قد تحدث في نفس وقت حدوثه و كذلك الأنشطة التي تليه و التي تسبقه.
3. التحديد الدقيق للأحداث التي تتضمنها شبكة الأعمال، مع مراعاة التسلسل الدقيق لوقوع الأحداث، بحيث لا يقع أي حدث إلا عند انتهاء النشاط أو الأنشطة التي تنتهي عنده ماعدا الحدث الأول بعبارة أخرى مراعاة أن كل نشاط يربط بين حدث بداية وحدث نهاية النشاط وبحيث يكون رقم الحدث الذي يمثل بداية النشاط أصغر من رقم الحدث الذي يمثل نهاية النشاط، حتى لا تظهر أنشطة سلبية في اتجاه عكسي، لأن ذلك يعني أن المسار سوف يكون غير منتهي .وبناء علي ذلك لا يجوز أن يتبع حدث بأنشطة متتالية تعود ثانية إلي نفس الحدث الذي بدأت منه
4. ترقيم كل حدث مع ضمان عدم تكرار رقم الحدث مرة أخرى.
5. تحديد الوقت اللازم لإنجاز كل نشاط على حد ووضعه أمامه على الشبكة.

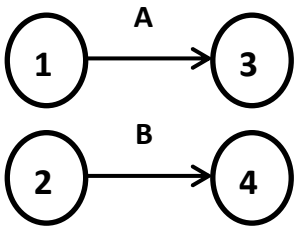
بصفة عامة قد نجد بعض الحالات التالية في الشبكة:

الحالة الأولي



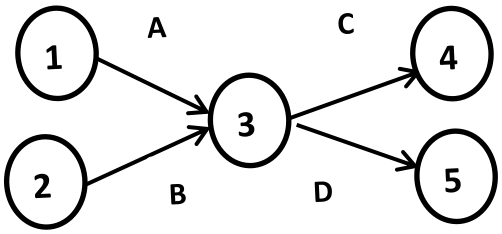
يمثل الشكل السابق أنشطة متسلسلة بحيث النشاط A يسبق النشاط B.

الحالة الثانية



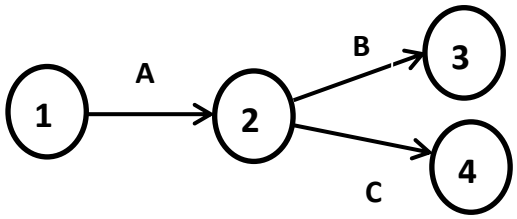
يوضح الشكل السابق أن النشاطين A و B يمثلان نشاطين متوازيين بحيث لا يرتبطان ببعضهما البعض و ينطلقان في نفس الوقت.

الحالة الثالثة



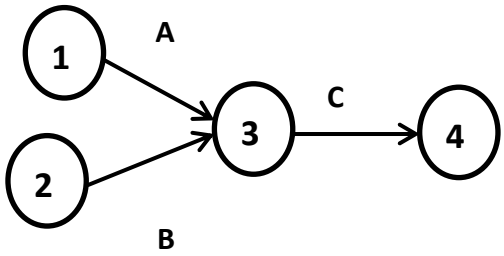
يوضح الشكل السابق أن النشاطين A و B لا يبدأن في نفس الوقت و كلاهما يسبق النشاطين C و D إلا أنه لا يمكن البدء بهاذين النشاطين دون الإنتهاء من النشاطين A و B .

الحالة الرابعة



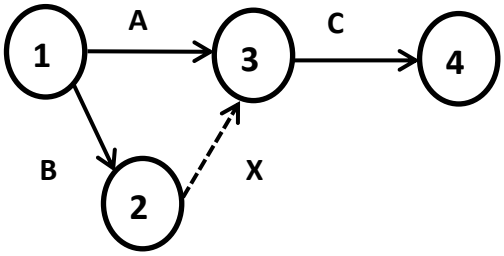
يوضح الشكل السابق أن النشاط A يسبق النشاطين C و B إلا أنه لا يمكن البدء بهاذين النشاطين دون الإنتهاء من النشاط A.

الحالة الخامسة



يوضح الشكل السابق أن النشاطين A و B لا يبدأن في نفس الوقت و كلاهما يسبق النشاطين C إلا أنه لا يمكن البدء بهذا النشاط دون الإنتهاء من النشاطين A و B .

الحالة السادسة

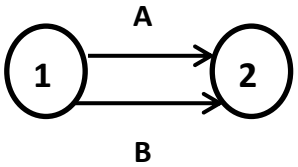


من خلال الشكل السابق نلاحظ أن النشاطين A و B يبدأن في نفس الوقت و كلاهما يسبق النشاط C إلا أنه لا يمكن البدء بهذا النشاط دون الإنتهاء من النشاطين A وأضفنا نشاط وهمي لتوضيح ذلك.

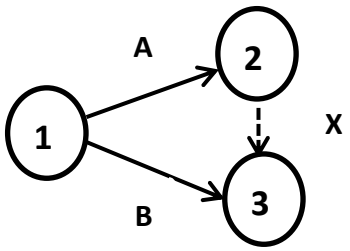
III.بعض الأخطاء في بناء شبكة البيانية

هناك بعض الأخطاء التي يجب تجنبها عند رسم شبكة الأعمال نوجزها في التالي:

1. لا يمكن أن يكون لنشاطين أو أكثر حدث البداية و النهاية ذاته.

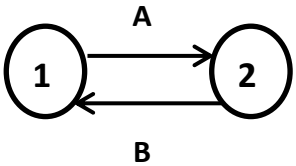


لتصحيح هذه الحالة و الحفاظ على منطق الشبكة نستخدم النشاط الوهمي X كمايلي:

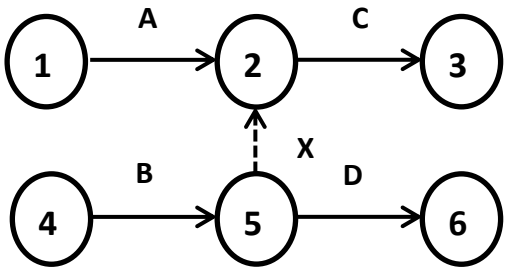


بحيث يجب أن يمثل كل سهم نشاطا واحدا فقط

2. لا يمكن العودة إلى نشاط سابق.

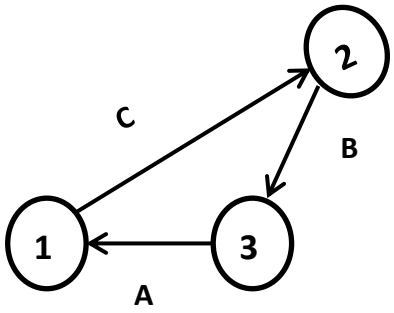


3. يمكن أن يكون لنشاطين أو أكثر حدث بداية واحد أو حدث نهاية واحد و يفضل في هذه الحالة استخدام الأنشطة الوهمية عندما تؤثر علاقة النشاطين المتوازية أو التشابكية في بدء أو نهاية أنشطة أخرى كما في الشكل التالي:

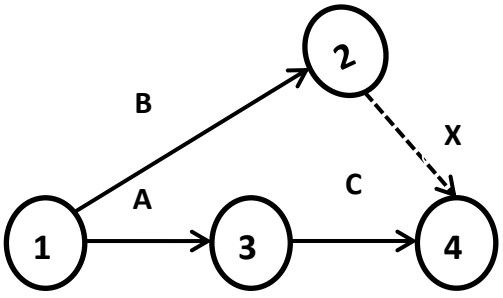


من خلال الشكل السابق نلاحظ أن النشاطين A و B لا يبدأن في نفس الوقت و كلاهما يسبق النشاط C ، أما النشاط D فيسبقه النشاط B فقط و لإزالة حالة التشابك بين الأنشطة المتوازية أضفنا نشاط وهمي X للدالة على أن النشاط C يسبقه النشاطين B وA .

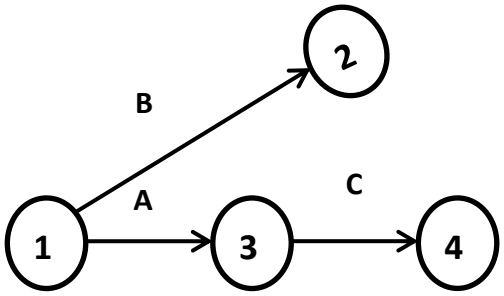
4. خطأ الدائرية و هو أن تشكل النشاطات فيما بينها حلقة مغلقة و هو مايعني تناقض مبدأ التتابع بين النشاطات المشكلة للشبكة كما هو موضح في الشكل التالي:



5. مشكلة الأنشطة المعلقة: و تتمثل في عدم إعتماد بعض الأنشطة التي تعتمد على أنشطة آخرى غيرحدث النهاية و يطلق عليها خطأ ديول "Dangling" بحيث يصبح النشاط معلق و لإزالة هذه الحالة نستخدم الأنشطة الوهمية كما هو موضح في الشكل التالي:



تصحيح حالة الأنشطة المعلقة



النشاط B يمثل نشاط معلق

IV.رسم شبكات الأعمال

لرسم شبكة أعمال يتعين على المهتم بالمشروع تحديد مواقع كل نشاط و حدث على الشبكة بحيث يعكس هذا الرسم كل مراحل المشروع بشكل تسلسي يوضح العلاقات بين الأنشطة و تتابعها و لحل هذه المشكلة هناك عدة طرق سنكتفي بدراسة واحدة فقط نسميها طريقة تحديد المستويات و لرسم شبكة الأعمال وفق هذه الطريقة نتبع الخطوات التالي:

1. إنشاء جدول يحدد أنشطة المشروع و مدة انجازها و النشاطات السابقة لها.
2. نحدد المستوى الأول من الأنشطة و يمثل النشاطات التي لا يسبقها أي نشاط آخر.
3. نشطب نشاطات المستوى الأول من جدول الأنشطة السابقة فنحصل على أنشطة لا تسبقها نشطات أخرى فنعتبرها المستوى الثاني ، نكرر العملية حتى ننتهي من تحديد كافة المستوبات .
4. كل مستوي يعطينا مرحلة من مراحل المشروع من بدايته إلى نهايته و الأنشطة المرتبطة به.
5. المرحلة الأولى تبدأ من حدث البداية و المرحلة الآخيرة تنتهي عند حدث النهاية.
6. نرسم كل الأحداث و الأنشطة النتعلقة بالمشروع على شبكة مع إعطاء كل حدث رقم و إدراج مدة كل نشاط على حد في الرسم.

لتوضيح الخطوات السابقة لإنشاء رسم لشبكة أعمال نقدم المثالين التاليين:

1.IV.حالة عدم وجود أنشطة وهمية

مثال1

يظهر الجدول الموالي النشاطات التي يجب إنجازها للقيام ببناء مصنع جديد مبينة فيما يلي:

النشاط	النشاط السابق له	المدة المتوقعة لانجازه بالشهر
A	-	10
B	-	5
C	B	3
D	C , A	4
E	C , A	5
F	D	6
G	E	5
H	G , F	5

المطلوب: رسم شبكة إنجاز أعمال هذا المصنع ؟

الحل

من خلال الجدول السابق يمكن تحديد النشاطات التي تنتمي إلى المستوى الأول و هي النشاطات التي لا يسبقها أي نشاط و تتمثل في النشاطين A وB .

بعد تحديد المستوى الاول نقوم بشط النشاطات التي تنتمي للمستوى الأول من جدول الأنشطة فيصبح كما يلي:

النشاط	النشاط السابق له
C	-
D	C
E	C
F	D
G	E
H	G , F

من خلال الجدول أعلاه يمكن تحديد النشاطات التي تنتمي إلى المستوى الثاني و تتمثل في النشاط C.

بعد تحديد المستوى الثاني نقوم بشط النشاطات التي تنتمي للمستوى الثاني من جدول الأنشطة فيصبح كما يلي:

النشاط	النشاط السابق له
D	-
E	-
F	D
G	E
H	G , F

من خلال الجدول أعلاه يمكن تحديد النشاطات التي تنتمي إلى المستوى الثالث و تتمثل في النشاطين D وE .

بعد تحديد المستوى الثالث نقوم بشط النشاطات التي تنتمي للمستوى الثالث من جدول الأنشطة فيصبح كما يلي:

النشاط	النشاط السابق له
F	-
G	-
H	G , F

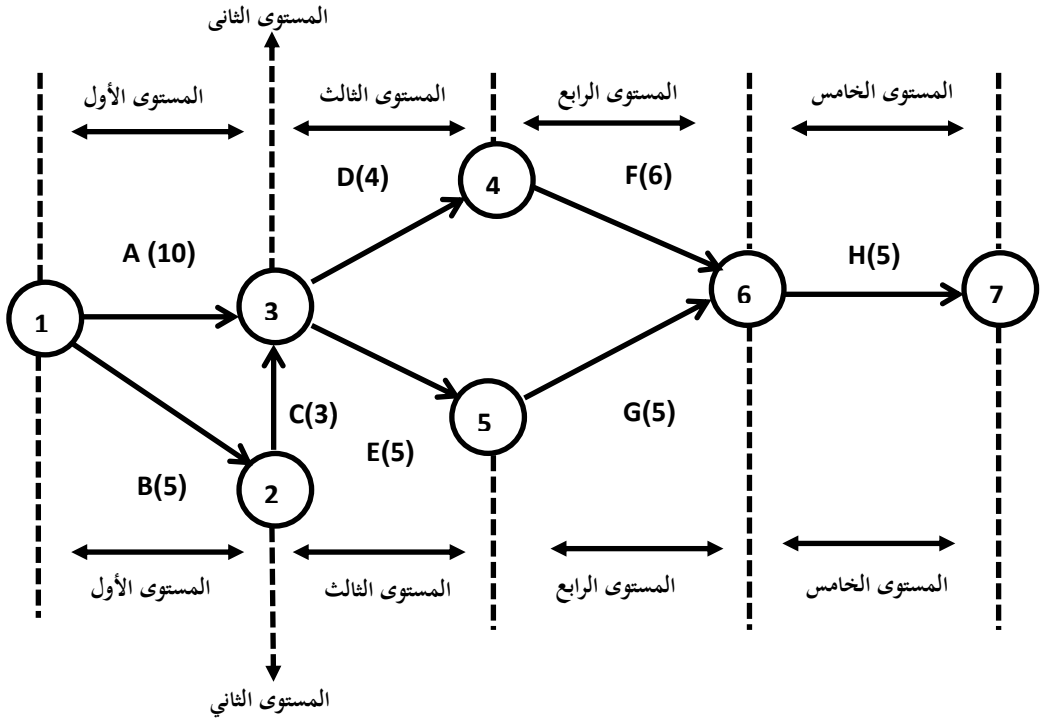
يبين الجدول أعلاه يمكن تحديد النشاطات التي تنتمي إلى المستوى الرابع و تتمثل في النشاطين F وG .
بعد تحديد المستوى الرابع نقوم بشط النشاطات التي تنتمي للمستوى الرابع من جدول الأنشطة فيصبح كما يلي:

النشاط	النشاط السابق له
H	-

من خلال الجدول أعلاه يمكن تحديد النشاطات التي تنتمي إلى المستوى الخامس و تتمثل في النشاطH
يمكن تلخيص ما سبق في الجول التالي:

المستوى	الأنشطة
المستوى الأول	A,B
المستوى الثاني	C
المستوى الثالث	D,E
المستوى الرابع	F,G
المستوى الخامس	H

بعدما قمنا بتحديد كافة المستويات و الأنشطة المنتمية لها نقوم برسم شبكة الأعمال كما يلي:



2.IV.حالة وجود أنشطة وهمية

لتوضيح كيفية رسم شبكة أعمال تحتوي على أنشطة وهمية نقدم المثال التالي:

يظهر الجدول الموالي النشاطات التي يجب إنجازها للقيام بمشروع ما مبينة فيما يلي:

النشاط	النشاط السابق له	المدة المتوقعة لانجازه بالساعة
A	-	8
B	-	2
C	-	6
D	A , B	9
E	B	8
F	C	10
G	D	10
K	E	6
L	F,E	9

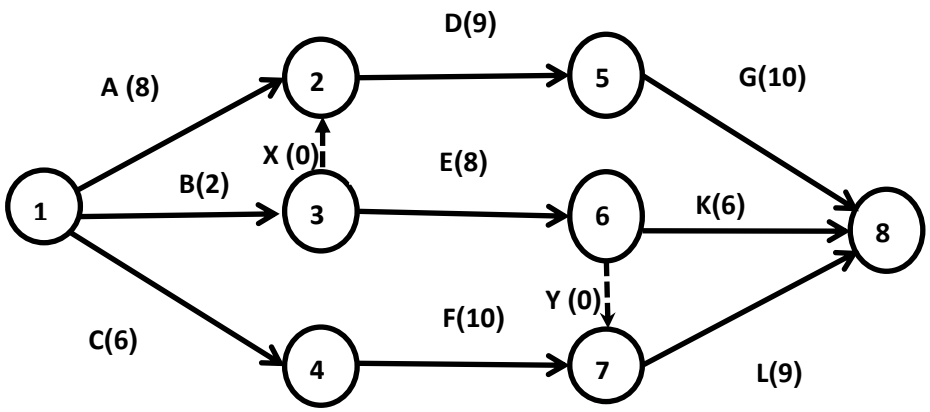
المطلوب: رسم شبكة إنجاز أعمال هذا المصنع ؟

الحل

تحديد مستوى كل نشاط

المستوى	الأنشطة
المستوى الأول	A,B,C
المستوى الثاني	D,E,F
المستوى الثالث	G,K,L

رسم شبكة الاعمال لهذا المشروع



من خلال الشكل السابق نلاحظ أننا أضفنا نشاطين وهميين X و Y لتوضيح أن النشاطD يسبقه النشاط B و النشاط L يسبقه النشاط E .

V.طريقة المسار الحرج (CPM)

تعرف طريقة المسار الحرج بأنها أسلوب لإعداد الخطط و برامج تنفيذ المشاريع و متابعة سير العمل فيها خاصة من حيث عنصر الوقت ، مع تحديد و تنظيم إحتياجات العمل منة العمال و المعدات و كافة الموارد و تهيئة الوسائل اللازمة لإختصار مدة التنفيذ عند اللزوم بأقل تكلفة ، و إعداد أساس لنظام ضبط التكاليف.

و تشمل طريقة المسار الحرج ثلاث مراحل أساسية هي:

1. مرحلة إعداد خطة العمل Planning .
2. مرحلة إعداد البرنامج الزمني Scheduling .
3. مرحلة متابعة العمل و التحكم به Follow up- Update .

تقدر فيها الفترة الزمنية اللازمة لتنفيذ كل نشاط على حده ، و يتم عمل الحسابات من خلال شبكة الأنشطة و إستنتاج مدة المشروع ككل و الحصول على بيانات زمنية عن كل نشاط لطبعا لتوقيت بداية المشروع ، إن طريقة المسار الحرج تسمح لنا بتحديد الأنشطة التي يجب أن تنفذ في أوقات محددة و لا يوجد مجال لتأخيريها إذا أريد للمشروع أن يتم إنجازه في المدة التي تم تحديدها سابقا و تسمى أنشطة المسار الحرج ، أو الأنشطة الحرجة و التي تتحكم في مدة تنفيذ المشروع ، و يجب تميز الأنشطة الحرجة عن الأنشطة الأخرى التي تحظى بمتسع من الوقت زيادة عن المدة المقدرة اللازمة لتنفيذها أي أن لديها فترة سماح و تسمى الفوائض الزمنية Float .

هناك طريقتان لتمثيل و عرض طريقة المسار الحرج وهما كما يلي:

1. طريقة مخطط الأسهم Arrow Diagram

تعتبر هذه الطريقة قديمة نوعا ما ، من خلالها يتم تمثيل النشاطات بأسهم أو خطوط في شبكة الأعمال و يكون بين الأسهم خانات صغيرة تمثل الأحداث Events أي النقاط الزمنية أو الوقائع التي يتم فيها إنجاز الأنشطة المؤدية إليها و يصبح بالإمكان البدء بالأنشطة التي تليها .

2. طريقة مخطط التتابع Precedence Technique

و فيها يتم تمثيل الأنشطة بخانات أو مربعات بدلا من الأسهم و تتصل بعضها ببعض بخطوط تمثل العلاقات بين النشاطات.

V.1.مميزات و فوائد طريقة المسار الحرج

تستخدم طريقة المسار الحرج بكثرة في جدولة المشروعات بدءا من مراحلها الأولية .

و لتحضير هذه الطريقة يتطلب من المالك أو المقاول أو من يقوم بإعدادها تكوين فكرة واضحة عن العمليات و الأنشطة المطلوبة و تسلسلها و توقيتها ، و بمجرد بناء النموذج الشبكي فإنه يتضح تنظيم و تخطيط المشكلات المتوقعة مثل الإعداد و التجهيز ، الحاجة للموارد اللازمة لإتمام الأنشطة في بعض الفترات ، وكيفية تعديل البرنامج للتغلب على هذه المشكلات ، و عند الإنتهاء من هذه التعديلات يتم حساب مدة المشروع و التوقيتات الزمنية للأنشطة ، و من ثم فإنه يمكن التنسيق بين النشاطات المختلفة و الموارد.

يمكن تلخيص أهم مميزات طريقة المسار الحرج و فوائدها بما يلي:

1. تفرض طريقة المسار الحرج ضرورة إجراء تحليل تفصيلي للمشروع مما يؤدي إلى بناء خطة عمل أفضل و برنامج أفضل يهيئ معلمات تفيد في متابعة سير العمل.
2. تمنح هذه الطريقة صورة واضحة لتسلسل الأنشطة التي يتكون منها المشروع.
3. طريقة المسار الحرج تحدد الأنشطة التي يجب أن تنفذ في أوقات محددة و إذا تأخرت فإن تأخيرها يؤدي إلى تأخير إنهاء المشروع ، و التي تسمى الأنشطة الحرجة ، و تميز تلك الأنشطة عن النشطة التي لها فترة سماح او فوائض زمنية في تنفيذها و يمكن تأخيرها ضمن حدود معينة دون التاثير على موعد إنهاء المشروع ككل.
4. إستعمال طريقة المسار الحرج يسهل إجراء التعديلات على خطة العمل و البرنامج مع الإحتفاظ بالسيطرة عليه.
5. تشكل هذه الطريقة اساس لتقيم مدى تأثير أي تأخير أو تعديل يطرأ أثناء تنفيذ المشروع على موعد إنهائه.
6. تسمح للمخطط لدراسة العلاقة بين الوقت و التكلفة المطلوبة لإقامة مشروع و التوصل إلى أفضل الحلول و أقلها تكلفة لتقصير مدة المشروع إذا كان ذلك ضروريا.

7. معرفة المسار الحرج من خلال الشبكة يمكن من تحديد التكلفة المطلوبة لإنجاز المشروع في حالة الرغبة في إنجازه أسرع مما هو مخطط له .
8. بإستخدام طريقة المسار الحرج أصبح رصد و متابعة المشروعات يتم بصورة أكثر فعالية عما كانت عليه في الماضي .
9. إن تطبيق المتابعة المستمرة لشبكة الأعمال يؤدي أيضا إلى إمكانية توظيف طريقة المسار الحرج كأداة إيجابية في حل مشاكل أخرى غير المشاريع مثل حل الدعاوى و المنازعات لتحديد المسؤلية عن التأخير في الأعمال و تأثير ذلك عن باقي الأعمال و التبعات المالية و حقوق الطراف .
10. قد ساعد تطور الكمبيوتر و توفر البرامج الخاصة بغدارة المشاريع و التخطيط و غنخفاض التكلفة النسبية لها في تطوير أساليب شبكات الأعمال و توسيع مجالها و شيوع إستعمالها ، و تستفيد كل الأطراف المشاركة في المشاريع الإنشائية سواءا كان مالكا أو مقاولا أو مديرا للمشروع او إستشاريا من طريقة المسار الحرج كطريقة لإدارة المشروع كل من وجهة نظره و اثبتت هذه الطريقة جدواها و فائدتها و لاقت قبولا و أصبحت المواصفات الخاصة لكثير من المشاريع الإنشائية .

V.2.المفاهيم و المصطلحات المستخدمة في طريقة المسار الحرج

1. **النشاط الحرج Critical Activity**: هو النشاط الذي إذا تم تأخيرإنتهائه فإنه يتسبب في تأخير المشروع.
2. **زمن البداية المبكر للنشاط Earliest Start:** هو الزمن الذي يبدأ فيه النشاط إذا أنجزت جميع اللأشطة السابقة في أوقاتها.
3. **زمن النهاية المبكر Earliest Finish:** هو الزمن الذي يمكن أن ينجز فيه النشاط إذا بدأ في وقته المبكر.

نهاية مبكرة = بداية مبكرة + وقت النشاط

4. **زمن نهاية متأخر Latest Finish:** هو أخر زمن يمكن إتمام النشاط فيه بدون أن يتسبب بتأخير أية أنشطة لاحقة.

5. **زمن بداية متأخر Latest Start:** هو أخر وقت يمكن أن يبدأ فيه النشاط بشرط عدم تأخير الأنشطة اللاحقة.

بداية متأخرة = نهاية متأخرة – وقت النشاط

6. الفائض الزمني للنشاط Slack Time:

الفائض في النشاط = زمن بداية متأخر – زمن بداية مبكر

7. **المسار Critical** : هو سلسلة من الأنشطة المتتابعة بين نقطة البدء ونقطة إتمام المشروع.

8. **المسار الحرج Critical Path:** هي سلسلة مستمرة من الأنشطة الحرجة التي تربط بين نقطة بدء و إتمام المشروع،يعتبر أطول المسارات على الشبكة ويعطي أقل وقت لازم لإتمام المشروع.

لتحديد المسار الحرج بالإعتماد على شبكة الأعمال نتبع الخطوات التالية:

1. رسم شبكة الأعمال إيجاد كافة المسارات المكونة لشبكة الأعمال و حساب الطول الزمني لكل منها.
2. تحديد المسار الحرج و يمثل أطول مسار على الشبكة و قد نصادف أكثر من مسار حرج، حيث يمثل الطول الزمني للمسار الحرج مدة إنجاز المشروع.
3. حساب البداية المبكرة لكل نشاط ES_i من خلال العلاقة التالية:

$$ES_{i+1} = ES_i + D_i$$

حيث البداية المبكرة لأي نشاط تساوي البداية المبكرة للنشاط السابق له مضافا إليها مدة إنجاز ذلك النشاط و في حالة و جود عدة نشاطات تسبقه نأخذ أكبر قيمة ، أما النشاطات التي لا يسبقها أي نشاط فإن الوقت المبكر لبدايتها هو الصفر، و تبدأ عملية حساب الأوقات المبكرة للأنشطة من يسار شبكة الأعمال إلى يمينها.

4. حساب النهاية المبكرة لكل نشاط EF_i من خلال العلاقة التالية:

$$EF_i = ES_i + D_i$$

أي أن النهاية المبكرة لأي نشاط تساوي بدايته المبكرة مضافا إليها مدة إنجاز ذلك النشاط.

5. حساب النهاية المتأخرة لكل نشاط LF_i من خلال العلاقة التالية:

$$LF_i = LF_{i+1} - D_i$$

حيث أن النهاية المتأخرة لكل نشاط تمثل النهاية المتأخرة للنشاط الذي يله مطروح منها مدة ذلك النشاط و في حالة وجود أنشطة لا تليها أنشطة أخرى تكون النهاية المتأخرة لها هي مدة إنجاز المشروع و يتم حساب الأوقات المتأخرة لإنجاز كل نشاط من يمين الشبكة إلى يسارها.

6. حساب البداية المتأخرة لكل نشاط LS_i و هي عبارة عن الوقت المتأخر لنهاية كل نشاط مطروح منه مدة إنجاز ذلك النشاط و تحسب وفق العلاقة التالية:

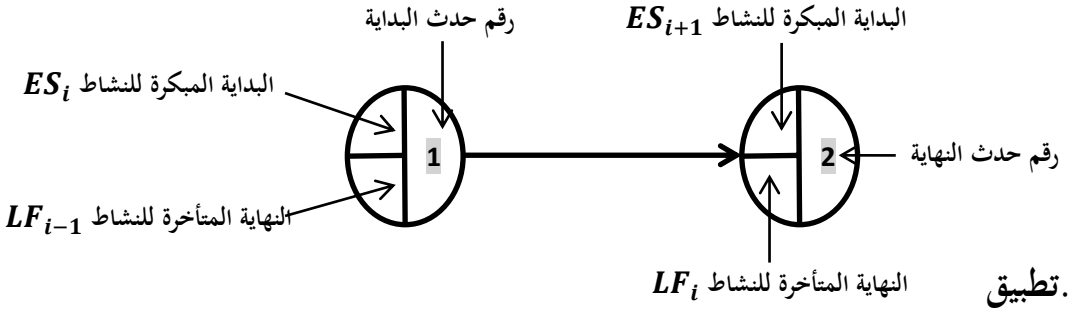
$$LS_i = LF_i - D_i$$

7. حساب الهامش الإجمالي TF_i و يمكن حسابه بطريقين وفق العلاقة التالية:

$$TF_i = LS_i - ES_i = LF_i - EF_i$$

كل نشاط هامشه الإجمالي يساوي صفر يعتبر نشط حرج.

لتسهيل عملية الحساب نقوم بإدراج الأوقات المبكرة لبداية النشاط و الأوقات المتأخرة لنهاية النشاط في الرسم البياني كمايلي:



V.3.تطبيق

ليكن لدينا جدول الأعمال التالي:

النشاط	النشاط السابق له	المدة المتوقعة لانجازه بالأسبوع
A	-	2
B	A	10
C	A , B	2
D	A	5
E	B	3
F	C , E	1
G	D,C	5
K	G ,D	6
L	F,K	5

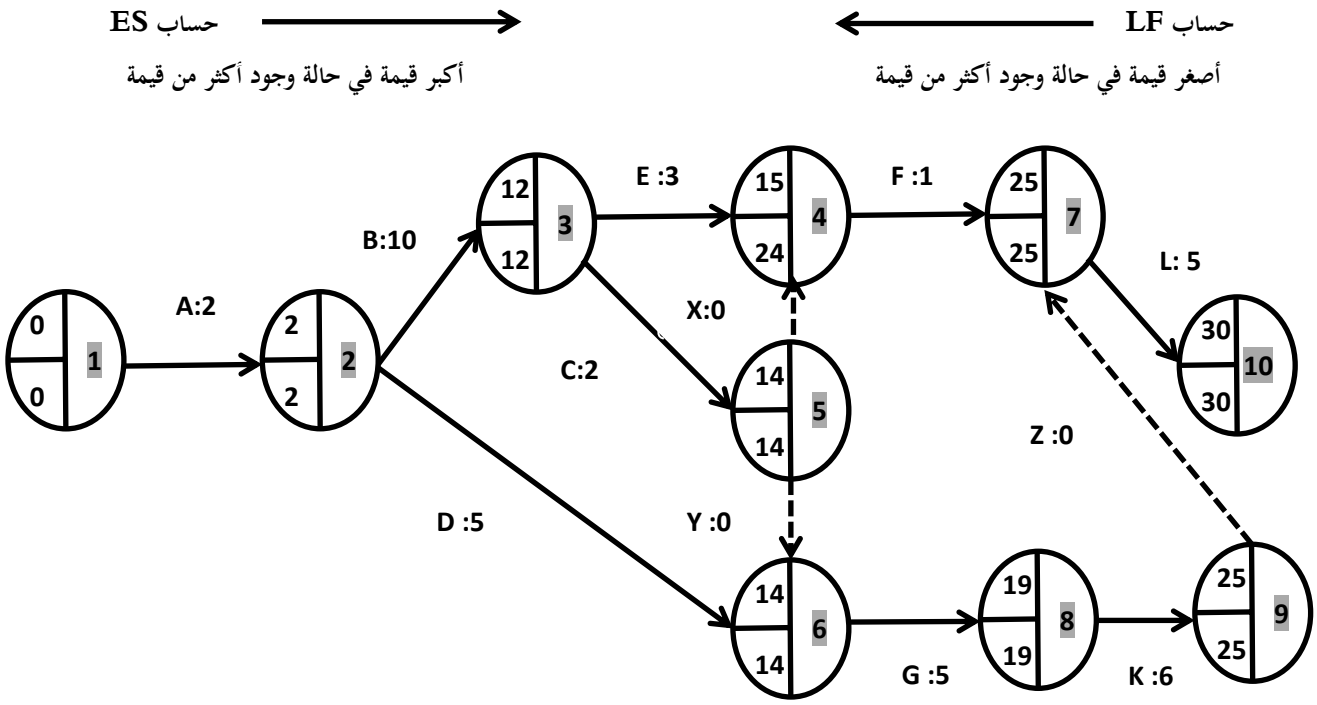
المطلوب:

رسم شبكة الأعمال ؟ تحديد المسار الحرج؟ تحديد زمن البداية المبكر ، زمن النهاية المبكرة، البداية المتأخرة ، النهاية المتأخرة و الزمن الفائض؟

رسم شبكة الأعمال

لرسم شبكة الأعمال نحدد مستوى كل نشاط كما يلي:

المستوى	الأنشطة
المستوى الأول	A
المستوى الثاني	B,D
المستوى الثالث	C,E
المستوى الرابع	F,G
المستوى الخامس	K
المستوى السادس	L



تحديد مختلف المسارات المكونة للمشروع

الرقم	المسار	الزمن	المجموع
1	A ,B,E,F,L	2+10+3+1+5	21
2	A ,B,C, G,K, L	2+10+2+5+6+5	30
3	A,B,C, F,L	2+10+2+1+5	20
4	A,D,G,K, L	2+5+5+6+5	23

المسار الحرج هو A ,B,C, G,K, L بإعتباره الأطول زمنا 30 أسبوع و تمثل مدة إنجاز المشروع.

تحديد الأوقات المبكرة و المتأخرة لبداية و نهاية كل نشاط

النشاط	النشاط السابق له	مدة النشاط	البداية		النهاية		الهامش	القرار
			ES	LS	EF	LF	TF	
A	**-**	**2**	0	0	2	2	**0**	**حرج**
B	**A**	**10**	2	2	12	12	**0**	**حرج**
C	**A , B**	**2**	12	12	14	14	**0**	**حرج**
D	**A**	**5**	2	9	7	14	**7**	**–**
E	**B**	**3**	12	21	15	24	**9**	**–**
F	**C , E**	**1**	15	24	16	25	**9**	**–**
G	**D,C**	**5**	14	14	19	19	**0**	**حرج**
K	**G ,D**	**6**	19	19	25	25	**0**	**حرج**
L	**F,K**	**5**	25	25	30	30	**0**	**حرج**

VI.طريقة تقييم و متابعة برامج المشاريع (PERT)

تفترض هذه الطريقة أن المدة الزمنية للنشاط لا يمكن تحديدها مسبقا بدرجة كافية من الدقة و التأكد ، و عوضا عن ذلك فإنه يتطلب لتحديدها ثلاث فترات زمنية منفصلة لكل نشاط هي "المدة الزمنية الأكثر إحتمالا" و "المدة التفاؤلية" و "المدة التشاؤمية" و من هذه التقديرات الثلاث يتم حساب المدة

الزمنية المتوقعة لكل نشاط و تستخدم في حسابات المشروع و بالتالي يتم إستنتاج المدة الزمنية المتوقعة للمشروع ككل عن طريق حساب الفترات الثلاثة من خلال الشبكة ، وهذه المدة الزمنية المتوقعة من الممكن أن تتحقق بنسبة 50% زيادة أو نقصان.

عالجت طريقة بيرت مشكلة عدم التاكد من المدد الزمنية بإتباع منهج يعتمد على نظرية الإحتمالات حيث يحتسب إحتمال إنهاء المشروع أو أي مرحلة منه خلال مدة معينة ، كما تضمنت تقييم أهمية النتائج المترتبة عن التأخير و تكاليف تعجيل إنجاز المشروع بطرق مختلفة بحيث تتمكن الإدارة من إعتماد أفضل خطة من البداية.

تناسب طريقة بيرت المشروعات التي يصعب تحديد فترات الأنشطة لها بدقة معقولة لعدم وجود البيانات السابقة أو الخبرات الكافية كالأبحاث و التصميمات ، أصبحت طريقة بيرت أكثر شعبية في الآونة الأخيرة بسبب توافر الحواسب و البرامج التي سهلت إستخدامها ووضحت العلاقات المعقدة بين النشاطات و إعتمادها على بعضها البعض بسهولة.

إن طريقة بيرت هي طريقة إحتمالية تتعامل مع المدة الزمنية للمشروع و الوقت المحدد لبداية و نهاية كل نشاط على إحتمالية إدراك تواريخ و أزمنة معينة ، أما طريقة المسار الحرج فهي مناسبة أكثر للتطبيق في المشاريع التي يمكن تقدير مددها بدرجة عالية من التأكد و الوثوق نسبيا ، و تستخدم في أنواع كثيرة و مختلفة من المشاريع و خاصة الإنشائية .

ولتحديد زمن إنجاز المشروع وفق طريق بيرت نتبع الخطوات التالية:

1. تحديد الأوقات الثلاثة لكل نشاط و هي:

الوقت الأكثر تفاؤلا t_o (Optmistic Time): يمثل أدنى وقت يمكن إنجاز النشاط فيه.

الوقت الأكثر إحتمالا t_m (Most Likely Time) : يمثل أقصى الوقت الأقرب لإنجاز النشاط فيه.

الوقت الأكثر تشاؤما t_p (Pesimistic Time) : يمثل أقصى وقت يمكن إنجاز النشاط فيه.

2. حساب الوقت المتوقع t_e (Expected Time) : يمثل المعدل العام لإستمرارية العمل بين حدثين و يعطى بالعلاقة التالية:

$$t_e = \frac{t_p + 4t_m + t_o}{6}$$

3. بالإعتماد على الأوقات المتوقعة لكل نشاط نقوم بتحديد المسار الحرج و الأنشطة المكونة له و بذلك نكون قد حددنا مدة إنجاز المشروع بإحتمال قدره 50% .

VI.1.حساب إحتمال إنجاز المشروع في مدة معينة قدرها X

لحساب إحتمال إنجاز المشروع في مدة معينة نقوم بالخطوات التالية:

1. نحسب تباين كل نشاط من النشاطات المكونة للمسار الحرج من خلال العلاقة التالية:

$$var_{ic} = \left(\frac{t_p - t_o}{6}\right)^2$$

2. نحسب تباين المشروع و الذي يساوي مجموع تباينات الأنشطة الحرجة

$$var_p = \sum var_{ic}$$

3. نحسب الإنحراف المعياري للمشروع ككل وفق العلاقة التالية:

$$\sigma^2{}_p = \sqrt{var_p}$$

4. من أجل معرفة إحتمال إنجاز المشروع في مدة زمنية معينة X تختلف عن المدة المتوسطة المتوقعة T نحول المتغير العشوائي X إلى متغير معياري Z وفق العلاقة التالية:

$$\mathrm{Z} = \frac{X - T}{\sigma_p} \quad , X > T$$

و

$$\mathrm{Z} = \frac{T - X}{\sigma_p} \quad , X < T$$

5. بعد تحديد قيمة Z نرجع إلى جدول التوزيع الطبيعي (أنظر الملحق 1) نتحصل على إحتمال إنجاز المشروع خلال مدة قدرها X ، و نظرا لكون التوزيع الطبيعي متماثل نميز بين حالتين هما :

- ✓ إذا كانت $X > T$ فإننا نضيف 50% إلى القيمة المجدولة لـ Z حتى نحصل على إحتمال إنجاز المشروع خلال المدة X .
- ✓ إذا كانت $X < T$ فإن إحتمال إنجاز المشروع خلال المدة X يساوي 50% مطروحا منها القيمة المجدولة لـ Z .

VI.2.تطبيق

ليكن لدينا جدول الأعمال الذي يوضح مختلف نشاطات مشروع ما و الأنشطة السابقة لها و كذا مختلف مدد إنجاز كل نشاط:

النشاط	النشاط السابق له	المدد بالأسبوع		
		الوقت الأكثر تفاؤلا	الوقت الأكثر احتمالا	الوقت الأكثر تشاؤما
A	-	8	11	20
B	-	15	21	27
C	A	25	32	51
D	B	6	9	12
E	D,C	8	16	24
F	D	12	15	15
G	E,F	15	18	22

المطلوب:

1. رسم شبكة الأعمال لهذا المشروع؟
2. حساب الوقت المتوقع لكل نشاط؟
3. تحديد المسار الحرج والوقت المتوقع لإنجاز المشروع وفق طريقة بيرت؟
4. ماهو إ حتمال أن ينجز المشروع في 82 و75 أسبوعا ؟
5. ماهي المدة الزمنية لإنجاز المشروع بإحتمال 20 و 95.5 % ؟

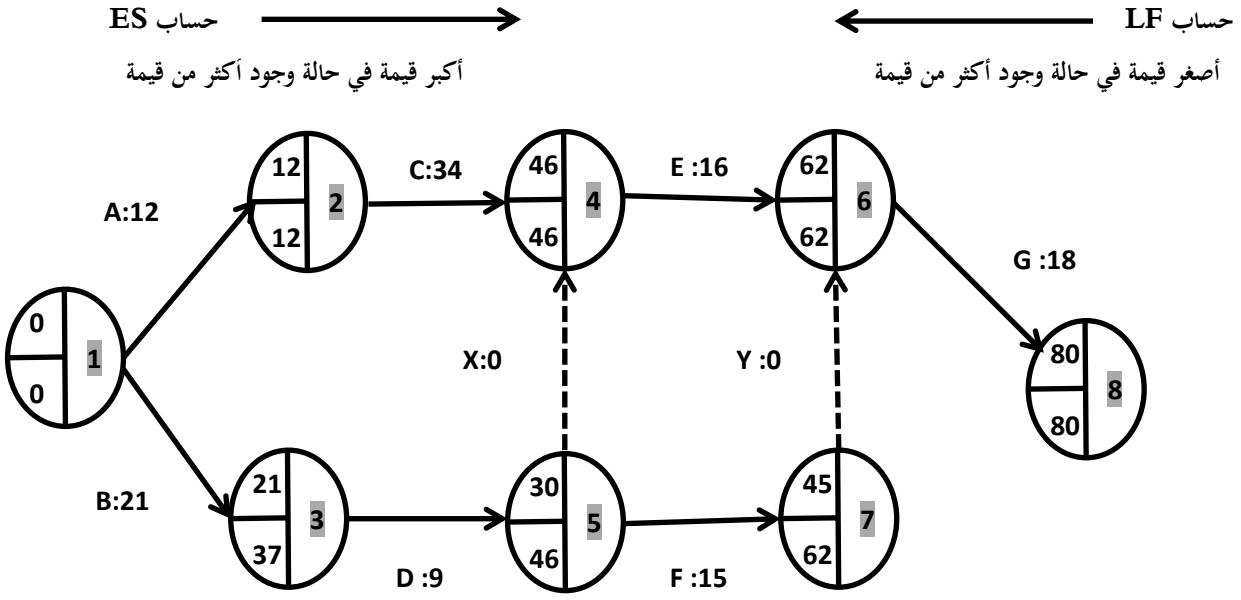
الحل

المدة المتوقعة لكل نشاط

النشاط	النشاط السابق له	الوقت الأكثر تفاؤلا t_o	الوقت الأكثر احتمالا t_m	الوقت الأكثر تشاؤما t_p	$t_e = \frac{t_p + 4t_m + t_o}{6}$
A	-	8	11	20	12
B	-	15	21	27	21
C	A	25	32	51	34
D	B	6	9	12	9
E	D,C	8	16	24	16
F	D	12	15	18	15
G	E,F	14	18	22	18

رسم شبكة أعمال هذا المشروع

المستوى	الأنشطة
المستوى الأول	A,B
المستوى الثاني	C,D
المستوى الثالث	F,E
المستوى الرابع	G



تحديد المسارات المكونة للمشروع و المسار الحرج

الرقم	المسار	الزمن	المجموع
1	A ,C,E,G	12+34+16+18	80
2	B,D, E,G	21+9+16+18	64
3	B,D,F, G	21+9+15+18	63

المسار الحرج هو A ,C,E,G بإعتباره الأطول زمنا 80 أسبوع و تمثل مدة إنجاز المشروع.

حساب الأوقات المبكرة و المتأخرة لبداية و نهاية كل نشاط

النشاط	النشاط السابق له	مدة النشاط	البداية		النهاية		الهامش	القرار
			ES	LS	EF	LF	TF	
A	-	**12**	0	0	12	12	**0**	**حرج**
B	-	**21**	0	16	21	37	**16**	**–**
C	**A**	**34**	12	12	46	46	**0**	**حرج**
D	**B**	**9**	21	37	30	46	**16**	**–**
E	**D,C**	**16**	46	46	62	62	**0**	**حرج**
F	**D**	**15**	30	47	45	62	**17**	**–**
G	**E,F**	**18**	62	62	80	80	**0**	**حرج**

حساب تباين كل نشاط

النشاط	النشاط السابق له	t_o	t_m	t_p	$t_e = \frac{t_p + 4t_m + t_o}{6}$	$var = \left(\frac{t_p - t_o}{6}\right)^2$
A	-	**8**	**11**	**20**	**12**	**4**
B	-	**15**	**21**	**27**	**21**	**4**
C	**A**	**25**	**32**	**51**	**34**	**18,78**
D	**B**	**6**	**9**	**12**	**9**	**1**
E	**D,C**	**8**	**16**	**24**	**16**	**7,11**
F	**D**	**12**	**15**	**18**	**15**	**1**
G	**E,F**	**14**	**18**	**22**	**18**	**1,78**

إن الوقت المتوقع لإنجاز المشروع T هو طول المسار الحرج 80 أسبوع و بالتالي تباين المشروع يمثل مجموع تباينات الأنشطة الحرجة أي:

$$var_{CP} = var_A + var_C + var_E + var_G$$

$$var_{CP} = 4 + 18{,}78 + 7{,}11 + 1{,}78 = 31{,}67$$

$$\sigma_{CP} = \sqrt{31{,}67} = 5{,}63$$

حساب إحتمال إنجاز المشروع في 82 أسبوع أي $X = 82$

حساب $P(X = 82)$

$$Z = \frac{82 - 80}{5{,}63} = 0{,}35$$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي (أنظر ملحق جدول التوزيع الطبيعي) و عند قيمة $Z = 0{,}3552$ نجد أن إحتمال إنجاز المشروع خلال 82 أسبوع هو 0,5+0,1368=0,6386 أي أن هناك إحتمال قدره 63,86% بأن ينجز هذا المشروع في 82 أسبوع .

حساب إحتمال إنجاز المشروع في 75 أسبوع أي $X = 75$

$$Z = \frac{80 - 75}{5{,}63} = 0{,}89$$

حساب $P(X = 75)$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي و عند قيمة $Z = 0{,}89$ نجد أن إحتمال إنجاز المشروع خلال 82 أسبوع هو 0,5-0,3133=0,1867 أي أن هناك إحتمال قدره 18,67% بأن ينجز هذا المشروع في 75 أسبوع .

حساب المدة الزمنية التي يكون إحتمالها 0,955

لدينا إحتمال أن تكون المدة محصورة بين X و T هي 0,955-0,5=0,455

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي نجد قيمة Z المقابلة لهذا الإحتمال هي 1,7.

$$1{,}7 = \frac{X - 80}{5{,}63}$$

$$X = (1{,}7 \times 5{,}63) + 80 \approx 90$$

و منه المدة الزمنية التي يكون إحتمالها 0,955 هي 90 أسبوع.

حساب المدة الزمنية التي يكون إحتمالها 0,2

لدينا إحتمال أن تكون المدة محصورة بين X و T هي 0,5-0,2=0,3

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي نجد قيمة Z المقابلة لهذا الإحتمال هي 0,08.

$$0{,}08 = \frac{80 - X}{5{,}63}$$

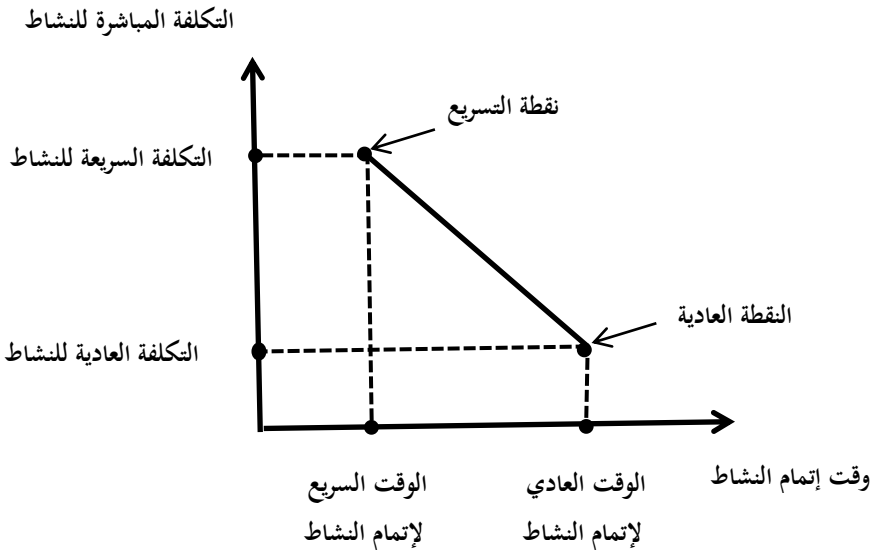
$$X = 80 - (0{,}08 \times 5{,}63) \approx 79{,}55$$

و منه المدة الزمنية التي يكون إحتمالها 0,955 هي 79,55 أسبوع.

VII.علاقة التكلفة بالوقت

رأينا سابقا من خلال دراستنا لأسلوب المسار الحرج و طريقة بيرت أن هدف متخذ القرار معرفة الأنشطة الحرجة التي إن لم تنجز في وقتها سوف تؤدي إلى تأخير مدة إنجاز المشروع ككل و بالتالي تسمح الأنشطة الحرجة بتوقع مدة إنجاز المشروع و الموارد اللازمة لذلك ، لكن قد ترغب المؤسسة في تخفيض مدة إنجاز المشروع بسبب تعاقدات قامت بها أو تحفيزات مقدمة و بالتالي تتحمل تكاليف إضافية نتيجة زيادة الموارد التي تسمح بتخفيض مدة بعض الأنشطةمما يبين أن هناك علاقة عكسية بين التكاليف و مدة إنجاز المشروع فكلما زادت التكاليف إنخفضت المدة و العكس و هنا نميز بين نوعين من التكاليف التي تتحملها المؤسسة هما:

التكاليف مباشرة : هي تكاليف تتناسب عكسيا مع أوقات إتمام النشاطات أي كلما زادت التكاليف المباشرة إنخفضت المدة اللازمة لإنجاز النشاطات و العكس صحيح مثل (رأس المال ، العمل ، المعدات ، المواد الأولية....) ، و يفرض أسلوب المسار الحرج وجود علاقة خطية تناسبية عكسية بين التكاليف المباشرة و مدة إنجاز المشروع و هذا ما يوضحه الشكل التالي:



يوضح الشكل السابق العلاقة بين التكاليف المباشرة للنشاط و المدة اللازمة لإنجازه و هي علاقة خطية متناسبة عكسيا و في هذه الحالة نميز من خلال الشكل مايلي:

التكلفة المباشرة العادية للنشاط: هي تتكاليف تتحملها المؤسسة في حالة إنجاز النشاط في وقته العادي.

الوقت العادي لإتمام النشاط: يمثل الحد الأقصى لإنجاز النشاط في حالة عدم تخصيص أية موارد إضافية

التكلفة المباشرة السريعة للنشاط: هي التكاليف الإضافية إذا رغبت في إنجاز النشاط في أقل من وقته العادي.

الوقت السريع لإتمام النشاط: يمثل الحد الأدنى اللازم لإتمام النشاط عند تخصيص موارد إضافية.

و يعطى ميل التكلفة بالعلاقة التالية:

$$\text{ميل التكلفة} = \frac{\text{التكلفة المتسارعة} - \text{التكلفة العادية}}{\text{الوقت العادي} - \text{التكلفة المتسارع}}$$

يشير ميل التكلفة إلى مقدار التكلفة الإضافية التي تتحملها المؤسسة لتخفيض مدة النشاط بوحدة زمنية واحدة.

التكاليف غير مباشرة: هي تكاليف متناسبة طرديا مع الزمن الكلي لإنجاز المشروع فكلما زاد ت مدة الإنجاز زادت تكاليفه غير المباشرة و العكس صحيح و من أمثلة ذلك (كراء المعدات ، أجور المشرفين ...).

ملاحظة

عند تسريع وقت إنجاز المشروع فأن هذا يؤدي إلى زيادة التكاليف المباشرة و إنخفاظ التكاليف غير المباشرة.

لتسريع مدة إنجاز المشروع علينا الإهتمام بتسريع الأنشطة الحرجة لأنها هي من تحدد مدة المشروع ككل و بذلك يمكن تحد ثلاثة أنواع من المدد الزمنية التي ينجز فيها المشروع و هي كالآتي:

المدة العادية لإنجاز المشروع :و هي الطول الزمني للمسار الحرج دون اللجؤ إلى الموارد الإضافية.

المدة الدنيا لإنجاز المشروع : تمثل أدنى مدة زمنية ينجز فيه المشروع مهما كانت التكاليف الإضافية لإنجازه.

المدة المثلى لإنجاز المشروع : تمثل المدة الزمنية الأقل من المدة العادية لإنجاز المشروع لكن بتكاليف إضافية أقل من تكاليف الحد الأدنى لإنجاز المشروع.

و لتحديد المدة المثلى لإنجاز المشروع و التكاليف الكليه لها نتبع الخطوات التالية:

1. تحديد المسارات المختلفة للمشروع.
2. تحديد النشاطات الحرجة التي يمكن تخفيض مدتها الزمنية و إهمال النشاطات التي لا يمكن تخفيضها.
3. حساب التكلفة الإجمالية للمشروع.
4. تحديد الفرق الزمني بين المسار الحرج و أقرب مسار إليه .
5. نحدد أقل ميل تكلفة للنشاطات الحرجة و في حالة تساوي نشاطين أو أكثر نعطي الأولوية للنشاط المشترك بين أكبر عدد من المسارات و نقوم بتخفيض مدته بحيث لا تتجاوز مدة التخفيض الفرق بين طول المسار الحرج و أقرب مسار إليه .

عموما نخفض مدة النشاط ذو أقل ميل تكلفة بما يسمح بعدم ظهور مسار آخر يصبح هو المسارالحرج بعد التخفيض.

ملاحظة

في حالة وجود أكثر من مسار حرج نعطي الأولوية للنشاطات المشتركة بين المسارات الحرجة و في حالة عدم وجود نشاط مشترك تعطى الأولوية للانشطة المتوازية

6. يتم تحديد المدة الجديدة لإنجاز المشروع و التكلفة المرتبطة به مع تحديد الأوقات الباقية للتخفيض لمختلف الأنشطة.
7. نكرر العملية 5 و 6 حتى لا يبقى أي نشاط على مسار من المسارات الحرجة قابل للتخفيض و بالتالي نكون قد توصلنا إلى أدنى مدة لإنجاز المشروع و التكاليف المرتبطة بها
8. نلخص ما سبق في جدول و نحصل على المدة المثلى لإنجاز المشروع وهي التي تعطي أدنى تكلفة ممكنة.

VII.1.تطبيق (حالة وجود مسار حرج واحد)

ليكن لدينا جدول الأعمال الذي يوضح مختلف نشاطات مشروع ما و الأنشطة السابقة لها و كذا مختلف مدد إنجاز كل نشاط:

النشاط	حدثي البداية و النهاية	النشاط السابق له	الوقت بالأسبوع		التكلفة المباشرة	
			العادي	السريع	العادية	السريعة
A	2-1	-	6	4	120	170
B	4-1	-	2	2	30	30
C	3-2	A	3	3	-	-
D	5-4	B	2	2	-	-
E	6-3	C	4	2	200	310
F	6-5	D	1	1	10	10
G	7-6	E, F	1	0,5	20	31
K	8-7	G	6	5	60	72
L	9-8	K	1	1	05	05
M	10-8	K	3	2	30	42
N	11-10	L, M	1	1	-	-
المجموع					275	670

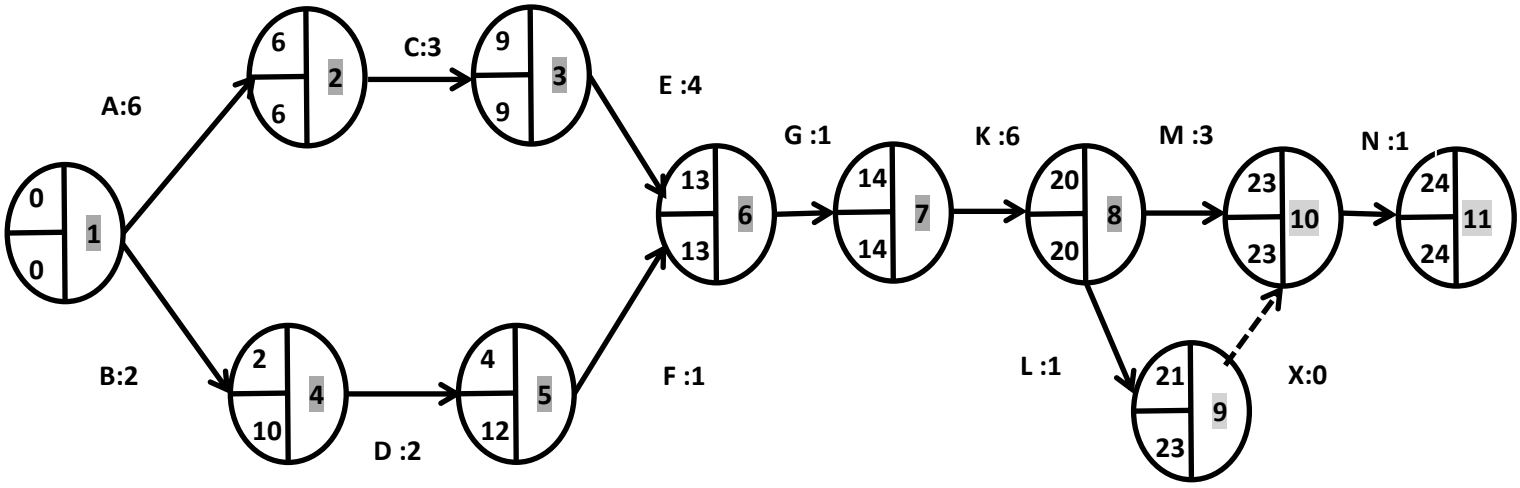
فإذا علمت أن التكاليف غير المباشرة تقدر بمبلغ 15 دج للأسبوع .

المطلوب:

1. رسم شبكة الأعمال لهذا المشروع؟
2. تحديد مختلف المسارات و المسار الحرج؟
3. تحديد المدة العادية لإنجاز المشروع و التكلفة الكلية العادية في ظل هذا الوقت؟
4. تحديد المدة السريعة لإنجاز المشروع و التكلفة الكلية السريعة في ظل هذا الوقت؟
5. تحديد الأزمنة المبكرة و المتأخرة لبداية و نهاية كل نشاط؟
6. تحديد المدة المثلى لإنجاز المشروع و التكلفة الكلية في ظل هذا الوقت؟

الحل

رسم شبكة أعمال هذا المشروع



تحديد المسارات المكونة للشبكة المشروع

الرقم	المسار	الزمن	المجموع
1	A ,C,E,G,K,M,N	6+3+4+1+6+3+1	24
2	A ,C,E,G,K,L, N	6+3+4+1+6+1+1	22
3	B,D,F,G,K,M,N	2+2+1+1+6+3+1	16
4	B,D,F,G,K,L, N	2+2+1+1+6+1+1	14

المسار الحرج هو A ,C,E,G,K,M,N بإعتباره الأطول زمنا 24 أسبوع و تمثل المدة العادية لإنجاز المشروع.

النشاط	حدثي البداية و النهاية	مدة النشاط	البداية		النهاية		الهامش	القرار
			ES	LS	EF	LF	TF	
A	2-1	6	0	0	6	6	0	حرج
B	4-1	2	0	8	2	10	8	–
C	3-2	3	6	6	9	9	0	حرج
D	5-4	2	2	10	4	12	8	–
E	6-3	4	9	9	13	13	0	حرج
F	6-5	1	4	12	5	13	8	–
G	7-6	1	13	13	14	14	0	حرج
K	8-7	6	14	14	20	20	0	حرج
L	9-8	1	20	22	21	23	2	–
M	10-8	3	20	20	23	23	0	حرج
N	11-10	1	23	23	24	24	0	حرج

إذا فرضنا أن المشروع سينتهي في الأوقات العادية المخطط لها فإنه يمكن حساب إجمالي تكلفة في هذه الحالة كالآتي:

إجمالي تكلفة المشروع في الأوقات العادية= التكلفة المباشرة العادية+التكلفة غير المباشرة

$$CT = 275 + 24(15) = 635$$

تحديد الوقت السريع لإنجاز المشروع و التكلفة الاجمالية السريعة

لتحديد الوقت السريع لإنجاز المشروع ككل نقوم بحساب طول المسار الحرج بالوقت السريع لكل نشاط من نشاطات المسار الحرج كما يلي:

4+3+2+0.5+5+2+3=17.5 أسبوع

إجمالي تكلفة المشروع في الآجالالسريعة= التكلفة المباشرة السريعة+التكلفة غير المباشرة

$$CT = 670 + 17{,}5(15) = 932{,}5$$
$$932{,}5 - 635 = 297{,}5$$

إذا أرادت المؤسسة تخفيض مدة المشروع من 24 أسبوع إلى 17.5 أسبوع فإنها تتحمل تكلفة قدرها 297.5 دج.

تحديد الوقت الأمثل لإنجاز المشروع و التكلفة الاجمالية له

لاحظنا من خلال المثال السابق أن الإدارة إذا أرادت تخفيض مدة إنجاز مشروع فعليها أن توفر الموارد اللازمة لذلك و هذه الموارد لا يمكن الحصول عليها إلا بتحمل تكاليف إضافية مما يترتب عنها زيادة في التكاليف الكلية للمشروع ، و لكن في بعض الأحيان قد ترغب الإدارة في تخفيض مدة المشروع عن مدته العادية و لكن بتكاليف أقل ، من خلال الإحلال بين الوقت و التكلفة بشكل يحقق التوازن بين مقدار التخفيض في وقت إنجاز المشروع و مقدار الزيادة في تكلفة المشروع المترتبة على هذا التخفيض ، و عندما يتحقق هذا التوازن يتحدد الوقت الأمثل لإنجاز المشروع.

مما سبق يمكن توضيح الخطوات الواجب لإتباعها لتحديد الزمن الأمثل لإنجاز المشروع كما يلي:

أولا:نحسب مقدار التخفيض المسموح به و ميل التكلفة لكل نشاط من نشاطات المشروع

النشاط	التخفيض المسموح به في وقت النشاط (1)	التكاليف المباشرة الإضافية (2)	ميل التكلفة (3)=(2)/(1)
A	2	50	25
B	0	0	0
C	0	0	0
D	0	0	0
E	2	110	55
F	0	0	0
G	0.5	11	22
K	1	12	12
L	0	0	0
M	1	12	12
N	0	0	0

ثانيا: حساب قيمة التغير في التكلفة الكلية عند تخفيض مدة إنجاز كل نشاط

من أجل تحديد الوقت الأمثل لإنجاز المشوع على الإدارة التركيز على الأنشطة الحرجة للمشروع لأن تخفيض وقت إنجاز المشروع عن الوقت العادي المقرر له يتطلب تخفيض أوقات الأنشطة الحرجة مما يترتب عنه زيادة في التكاليف المباشرة للأنشطة و تخفيض التكلفة غير المباشرة للمشروع ككل و بالتالي يجب التركيز على صافي التغير في التكلفة الكلية عند محاولة تخفيض أوقات الأنشطة.

بالرجوع إلى الجدول السابق يمكن حساب قيمة التغير في التكلفة الكلية عند تخفيض مدة إنجاز كل نشاط كما هو موضح بالجدول التالي:

النشاط الحرج القابل للتسريع	التخفيض المسموح به في وقت النشاط بالأسبوع	مقدار الزيادة في التكلفة المباشرة السريعة لكل أسبوع (ميل التكلفة) (1)	مقدار الإنخفاض في التكاليف غير المباشرة (2)	صافي التغير في التكلفة الكلية لكل أسبوع (3)=(1)-(2)
A	2	25	15	10
E	2	55	15	40
G	0.5	22	15	7
K	1	12	15	-3
M	1	12	15	-3

نلاحظ من خلال الجدول أن تسريع النشاطين K و M حدوث تخفيض في التكلفة الكلية .

ثالثا : حساب الوقت الأمثل لإنجاز المشروع و التكلفة الكلية المقابلة له

بما أن تسريع النشاطين K و M إلى إنخفاظ التكلفة الكلية فيمكن حساب الزمن الأمثل لإنجاز المشروع كما يلي:

الزمن الأمثل لإنجاز المشروع= الزمن العادي لإنجاز المشروع – التخفيض المسموح به في وقت الأنشطة الحرجة التي تسمح بتخفيض التكلفة الكلية للمشروع

الزمن الأمثل لإنجاز المشروع=24-1-1=22 أسبوع

التكلفة الكلية لإنجاز المشروع

$$CT = 635 - 1(3) - 1(3) = 629$$

VII.2.تطبيق (حالة وجود أكثر من مسار حرج)

ليكن لدينا جدول الأعمال الذي يوضح مختلف نشاطات مشروع ما و الأنشطة السابقة لها و كذا مختلف مدد إنجاز كل نشاط:

النشاط	حدثي البداية و النهاية	النشاط السابق له	المدة باليوم		التكلفة المباشرة العادية	تكلفة تسريع كل نشاط باليوم
			العادي	السريع		
A	3-1	-	30	21	600	30
B	2-1	-	15	12	240	20
C	3-2	B	9	6	90	15
D	4-3	A, C	12	9	180	20
E	5-3	A, C	15	9	300	25
F	6-4	D	18	9	180	20
G	6-5	E	15	6	120	10
K	7-6	F ,G	15	12	90	10
المجموع					1800	-

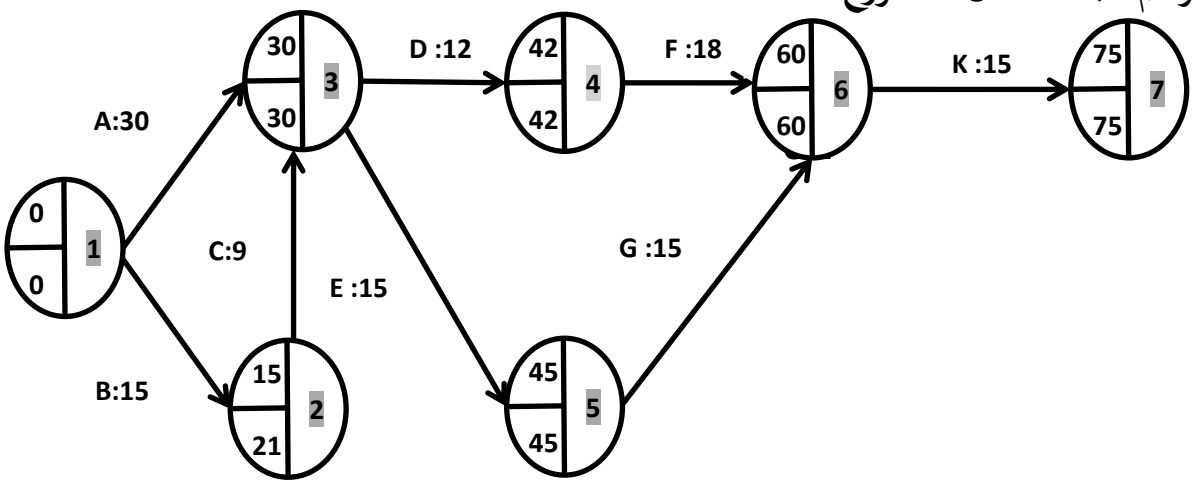
فإذا علمت أن التكاليف غير المباشرة تقدر بمبلغ 20 دج لليوم .

المطلوب:

1. رسم شبكة الأعمال لهذا المشروع؟
2. تحديد مختلف المسارات و المسار الحرج؟
3. تحديد المدة العادية لإنجاز المشروع و التكلفة الكلية العادية في ظل هذا الوقت؟
4. تحديد المدة السريعة لإنجاز المشروع و التكلفة الكلية السريعة في ظل هذا الوقت؟
5. تحديد الأزمنة المبكرة و المتأخرة لبداية و نهاية كل نشاط؟
6. تحديد المدة المثلى لإنجاز المشروع و التكلفة الكلية في ظل هذا الوقت؟

الحل

رسم شبكة أعمال المشروع



تحديد المسارات المكونة للمشروع و المسار الحرج

الرقم	المسار	الزمن	المجموع
1	A,D,F, K	30+12+18+15	75
2	A, E,G,K	30+15+15+15	75
3	B,C,D,F,K	15+9+12+18+15	69
4	B,C,E,G,K	15+9+15+15+15	69

تحديد الأوقات المبكرة و المتأخرة لبداية و نهاية كل نشاط

النشاط	حدثي البداية و النهاية	النشاط السابق له	مدة النشاط	البداية		النهاية		الهامش	القرار
				ES	LS	EF	LF	TF	
A	**3-1**	**-**	**30**	0	0	30	30	**0**	**حرج**
B	**2-1**	**-**	**15**	0	6	15	21	**6**	**–**
C	**3-2**	**B**	**9**	15	21	24	30	**6**	**–**
D	**4-3**	**A, C**	**12**	30	30	42	42	**0**	**حرج**
E	**5-3**	**A, C**	**15**	30	30	45	45	**0**	**حرج**
F	**6-4**	**D**	**18**	42	42	60	60	**0**	**حرج**
G	**6-5**	**E**	**15**	45	45	60	60	**0**	**حرج**
K	**7-6**	**F ,G**	**15**	60	60	75	75	**0**	**حرج**

هناك مسارين حرجين هما:

المسار الأول: **1⟶ 3⟶ 4⟶6⟶7**

الأنشطة المكونة له هي: A,D,F, K

المسار الثاني: **1⟶ 3⟶ 5⟶6⟶7**

الأنشطة المكونة له هي: A, E,G,K

حيث طول كل منهما 75 يوما و بالتالي المدة العادية لإنجاز المشروع هي 75 يوما.

حساب التكلفة العادية الإجمالية للمشروع

$$CT = 1800 + 75(20) = 2300$$

حساب وقت إتمام المشروع السريع

المسار الأول : 21+9+9+12=51 يوم

المسار الثاني : 21+9+6+12=48 يوم

و بما أن المسار الأول هو الأطول زمنا فإن الوقت السريع لإنجاز المشروع هو 51 يوم.

حساب التكلفة السريعة المثلى لإنجاز المشروع

لحساب التكلفة السريعة المثلى للمشروع نتبع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى

تحديد النشاط الحرج الذي له أقل ميل تكلفة و تحديد فترة التخفيض المسموح بها لهذا النشاط و بما أن هناك نشاطين حرجين سوف نركز على الأنشطة المشتركة.

لدينا النشاطين المشتركين بين المسارين الحرجين هما : A و K و بما أن تكلفة تسريع النشاط K أقل من النشاط A فإننا نختار النشاط K كأساس لتسريع وقت المشروع.

و بما أن الفرق بين طول المسار الحرج و أقرب مسار إليه هو 6 أيام وبالتالي الفترة المسموح بتخفيضها هي 6 أيام ، و لدينا فترة التخفيض المسموح بها للنشاط K هي 3 أيام و بالتالي نخفضه بهذه المدة و يصبح غير قابل للتخفيض مرة أخرى و يترتب عن ذلك النتائج التالية:

التكلفة المباشرة للمشروع

$$1800 + 3(10) = 1830$$

مدة انجاز المشروع = 75-3 =72 يوم

الفترة المسموح بها لتخفيض النشاط K هي 0 يوم

طول المسارات

الرقم	المسار	الزمن	المجموع
1	A,D,F, K	30+12+18+12	72
2	A, E,G,K	30+15+15+12	72
3	B,C,D,F,K	15+9+12+18+12	66
4	B,C,E,G,K	15+9+15+15+12	66

الخطوة الثانية

بعد تخفيض مدة إنجاز النشاط K بـ 3 أيام يبقى النشاط A مشترك بين المسارين الحرجين و بالتالي يمكن تخفيض مدة إنجازه بـ 6 أيام حتى و إن كانت المدة المسموح بها لتخفيضه 9 أيام و ذلك لأن الفرق بين مدة إنجاز المسار الحرج و أقرب مسار إليه هي 6 أيام و يترتب عن ذلك النتائج التالية:

التكلفة المباشرة للمشروع

$$1830 + 6(30) = 2010$$

الفترة المسموح بها لتخفيض النشاط A هي 3 أيام

مدة انجاز المشروع = 72-6 =66 يوم

طول المسارات

الرقم	المسار	الزمن	المجموع
1	A,D,F, K	24+12+18+12	66
2	A, E,G,K	24+15+15+12	66
3	B,C,D,F,K	15+9+12+18+12	66
4	B,C,E,G,K	15+9+15+15+12	66

نلاحظ من خلال الجدول أن كل المسارات أصبحت حرجة و هذا يعني أن كلا النشاطين B و C أصبحا حرجين.

الخطوة الثالثة

بما أن كل المسارات أصبحت حرجة و نرغب في تخفيض فترة المشروع لذا نركز على الأنشطة الحرجة المكونة للمسارات المتوازية و بالنظر إلى الرسم السابع لشبكة أعمل هذا المشروع نجد أن هناك مسارين متوازيين يعقان بين الحدثين 3 و 6 هما المسار $D \to F$ و المسار $E \to G$.و لتخفيض مدة إنجاز المشروع نبحث عن النشاط الحرج في كلا المسارين المتوازيين ذو ميل التكلفة الأقل و في هذه الحالة نجد النشاط D في المسار الأول و النشاط G في المسار الثاني و تقدر فترة التخفيض المسموح بها في النشاط D بـ 3 أيام حتى و النشاط G بـ 9 أيام و بالتالي تتحدد فترة التخفيض للنشاطين معا بـ 3 أيام و يترتب عن ذلك النتائج التالية:

التكلفة المباشرة للمشروع

$$2010 + 3(20) + 3(10) = 2100$$

مدة انجاز المشروع = 66-3 =63 يوم

الفترة المسموح بها لتخفيض النشاط G هي 6 أيام

الفترة المسموح بها لتخفيض النشاط D هي 0 يوم

طول المسارات

الرقم	المسار	الزمن	المجموع
1	A,D,F, K	24+9+18+12	63
2	A, E,G,K	24+15+12+12	63
3	B,C,D,F,K	15+9+9+18+12	63
4	B,C,E,G,K	15+9+15+12+12	63

الخطوة الرابعة

نعود مرة أخرى إلى المسارين المتوازيين في الخطوة السابقة و نختار نشاط من كل مسار يكون ميل تكلفته الأقل من بين الأنشطة المكونة له بالنسبة للمسار $D \to F$ نختار النشاط F أما المسار $E \to G$ نختار النشاط G و تقدر فترة التخفيض المسموح بها لهذين النشاطين 9 و 6 أيام على الترتيب و منه تكون فترة التخفيض المسموح بها للنشاطين معا 6 أيام و يترتب عن ذلك النتائج التالية:

التكلفة المباشرة للمشروع

$$2100 + 6(20) + 6(10) = 2280$$

مدة انجاز المشروع = 63-6 =57 يوم

الفترة المسموح بها لتخفيض النشاط G هي 0 يوم

الفترة المسموح بها لتخفيض النشاط F هي 3 أيام

طول المسارات

الرقم	المسار	الزمن	المجموع
1	A,D,F, K	24+9+12+12	57
2	A, E,G,K	24+15+6+12	57
3	B,C,D,F,K	15+9+9+12+12	57
4	B,C,E,G,K	15+9+15+6+12	57

الخطوة الخامسة

نعود مرة أخرى إلى المسارين المتوازيين في الخطوة السابقة و نختار نشاط من كل مسار يكون ميل تكلفته الأقل من بين الأنشطة المكونة له بالنسبة للمسار $D \to F$ نختار النشاط F أما المسار $E \to G$ نختار النشاط E و تقدر فترة التخفيض المسموح بها لهذين النشاطين 6 و 3 أيام على الترتيب و منه تكون فترة التخفيض المسموح بها للنشاطين معا 3 أيام و يترتب عن ذلك النتائج التالية:

التكلفة المباشرة للمشروع

$$2280 + 3(20) + 3(25) = 2415$$

مدة انجاز المشروع = 57-3 =54 يوم

الفترة المسموح بها لتخفيض النشاط F هي 0 يوم

الفترة المسموح بها لتخفيض النشاط E هي 3 أيام

طول المسارات

الرقم	المسار	الزمن	المجموع
1	A,D,F, K	24+9+9+12	54
2	A, E,G,K	24+12+6+12	54
3	B,C,D,F,K	15+9+9+9+12	54
4	B,C,E,G,K	15+9+12+6+12	54

الخطوة السادسة

إذا نظرنا إلى شبكة الأعمال نلاحظ أن النشاط A يتوازى مع النشاطين B وC و بالتالي يمكن تخفيض وقت إنجاز النشاط A للمرة الثانية على أن يتم تخفيض وقت إتمام النشاطين B أوC بنفس المقدار و بما أن ميل التكلفة للنشاط C أقل من ميل تكلفة B فإنه يتم إختيار النشاط C لتخفيض وقت إتمامه و التخفيض المسموح به لهذين النشاطين 3 أيام تكون فترة التخفيض المسموح بها للنشاطين معا 3 أيام و يترتب عن ذلك النتائج التالية:

التكلفة المباشرة للمشروع

$$2415 + 3(30) + 3(15) = 2550$$

مدة انجاز المشروع = 54-3 =51 يوم

الفترة المسموح بها لتخفيض النشاط A هي 0 يوم

الفترة المسموح بها لتخفيض النشاط C هي 0 يوم

طول المسارات

الرقم	المسار	الزمن	المجموع
1	A,D,F, K	21+9+9+12	51
2	A, E,G,K	21+12+6+12	51
3	B,C,D,F,K	15+6+9+9+12	51
4	B,C,E,G,K	15+6+12+6+12	51

بعد هذه الخطوة نكون قد إستهلكنا أغلب أوقات التخفيض المسموح بها للنشاطات و بقي لنا نشاطان هما B وE بفترة بـ و 3 أيام على الترتيب إلا أن تخفيض مدة هذين النشاطين يؤدي إلى زيادة التكلفة المباشرة للمشروع دون التخفيض من مدة إنجازه حيث لا ينتميان إلى المسار

$A \to D \to F \to K$ و بالتالي عندما نخفض مدة إنجازهما لا تتأثر مدة إنجاز هذا المسار و يعتر حرج و بالتالي يؤدي هذا إلى زيادة في التكاليف المباشرة دون إنقاص في مدة إنجاز المشروع .

يمكن تلخيص ماسبق في الجدول التالي:

خطوات التخفيض	النشاط الذي يتم تخفيضه	وقت إنجاز المشروع	التكلفة المباشرة للمشروع (1)	التكلفة غير المباشرة للمشروع (2)	إجمالي تكلفة المشروع (1)+(2)
0	-	75	1800	20×75 1500=	3300
1	K	72	1830	20×75 1500=	3270
2	A	66	2010	20×75 1500=	3330
3	D,G	63	2100	20×75 1500=	3360
4	F,G	57	2280	20×75 1500=	3420
5	E,F	54	2415	20×75 1500=	3495
6	A,C	51	2550	20×75 1500=	3570

من خلال الجدول أعلاه نلاحظ أن الوقت الأمثل اللازم لإتمام المشروع هو 72 يوم لأنه يعطي أقل تكلفة ممكنة.

VIII.تمارين مقترحة

VIII.1.تقوم بلدية الجلفة بدراسة سير أعمال مشروع بناء شوارع في المدينة من خلال جدول الأعمال التالي:

النشاط	وصف النشاط	النشاط السابق له	مدة إنجاز النشاط بالأشهر
A	إعداد تقرير الجدوى الفنية	-	2
B	تنظيف الموقع و حفر الأساس	A	4
C	شق الطرق	B	6
D	تمهيد الطرق	B	3
E	رصف الشارع و ترتيبه	C, D	8
F	الدهان و رسم الحدود	E	5
G	تبليط الرصيف	E, D	10

المطلوب:

1. رسم شبكة الأعمال لهذا المشروع؟ تحديد مختلف المسارات و المسار الحرج؟
2. تحديد الأزمنة المبكرة و المتأخرة لبداية و نهاية كل نشاط؟
3. تحديد الأنشطة الحرجة و الزمن الفائض من الأنشطة غير الحرجة؟

VIII.2.تقوم مؤسسة بدراسة خط سير أعمال مشروع بناء أبراج سكنية من خلال جدول الأعمال التالي:

النشاط	وصف النشاط	النشاط السابق له	مدة إنجاز النشاط بالأشهر
A	إعداد تقرير الجدوى الفنية	-	2
B	تنظيف الموقع و حفر الأساس	A	4
C	صب الأساس	A	7
D	وضع الأعمدة و المصدات	A, B ,C	5
E	رصف الشارع و ترتيبه	B	7
F	التجريب و الفحص المبدئي	C, D	6
G	التشطيب النهائي	E, D, F	10

المطلوب:

1. رسم شبكة الأعمال لهذا المشروع؟
2. تحديد مختلف المسارات و المسار الحرج؟
3. تحديد الأزمنة المبكرة و المتأخرة لبداية و نهاية كل نشاط؟
4. تحديد الأنشطة الحرجة و الزمن الفائض من الأنشطة غير الحرجة؟

VIII.3.تقوم مؤسسة بدراسة مشروع إمدادات الصرف الصحي من خلال جدول الأعمال التالي:

النشاط	المدد بالأسابيع		
	الوقت التفاؤلي	الوقت الأكثر إحتمالا	الوقت التشاؤمي
2-1	6	10	14
3-1	10	12	14
4-1	12	16	26
5-2	8	10	12
4-3	4	7	10
5-3	4	6	8
5-4	8	12	16
6-5	3	15	7

المطلوب:

1. رسم شبكة الأعمال لهذا المشروع؟
2. حساب الوقت المتوقع لكل نشاط؟
3. تحديد المسار الحرج والوقت المتوقع لإنجاز المشروع وفق طريقة بيرت؟
4. ماهو إ حتمال أن ينجز المشروع في 40 أسبوعا ؟
5. ماهي المدة الزمنية لإنجاز المشروع بإحتمال 95% ؟

VIII.4.تقوم مؤسسة بدراسة مشروع خلال جدول الأعمال التالي:

النشاط	النشاط السابق له	المدد بالأسابيع		
		الوقت التفاؤلي	الوقت الأكثر إحتمالا	الوقت التشاؤمي
A	-	8	10	12
B	A	12	16	26
C	A	10	12	14
D	B, C	8	12	16
E	C, D	3	6	9
F	C	9	11	13
G	E, F	9	10	17
K	G	4	6	8

المطلوب:

1. رسم شبكة الأعمال لهذا المشروع؟
2. حساب الوقت المتوقع لكل نشاط؟
3. تحديد المسار الحرج والوقت المتوقع لإنجاز المشروع وفق طريقة بيرت؟
4. ماهو إ حتمال أن ينجز المشروع في 70 أسبوعا ؟
5. ماهي المدة الزمنية لإنجاز المشروع بإحتمال 95% ؟

VIII.5.فيما يلي البيانات المتعلقة بالأنشطة التي يتكون منها أحد المشروعات المقترح أن تنفذها الشركة "X" للمقاولات:

النشاط	حدثي البداية و النهاية	الوقت بالأسبوع		التكلفة المباشرة بالآلاف	
		العادي	السريع	العادية	السريعة
A	2-1	7	5	140	210
B	3-2	11	5	440	620
C	4-2	10	6	270	410
D	4-3	3	3	150	150
E	4-5	9	5	180	340

فإذا علمت أن التكاليف غير المباشرة تقدر بمبلغ 45 دج للأسبوع .

المطلوب:

1. رسم شبكة الأعمال لهذا المشروع؟
2. تحديد مختلف المسارات و المسار الحرج؟
3. تحديد المدة العادية لإنجاز المشروع و التكلفة الكلية العادية في ظل هذا الوقت؟
4. تحديد المدة السريعة لإنجاز المشروع و التكلفة الكلية السريعة في ظل هذا الوقت؟
5. تحديد الأزمنة المبكرة و المتأخرة لبداية و نهاية كل نشاط؟
6. تحديد المدة المثلى لإنجاز المشروع و التكلفة الكلية في ظل هذا الوقت؟

VIII.6.فيما يلي بيان بالأنشطة التي يتكون منها أحد مشروعات البحوث والتطوير الذي يقوم مركز البحوث والدارسات الجزائري، وعلاقات التتابع الفني التي تربط الأنشطة ببعضها البعض، و التقديرات الزمنية اللازمة لإنجاز الأنشطة باليوم

النشاط	حدثي البداية و النهاية	النشاط السابق له	الوقت بالأيام		التكلفة المباشرة العادية	التكلفة السريعة لكل يوم
			العادي	السريع		
A	2-1	-	17	12	120	8
B	4-2	A	29	25	500	25
C	5-3	A	39	35	525	20
D	5-4	B	24	20	360	24
E	7-5	B , C	18	15	180	15
F	7-6	C	36	30	480	22
G	8-7	E, F	12	8	96	14

فإذا علمت أن التكاليف غير المباشرة تقدر بمبلغ 20 دج لليوم.

المطلوب:

1. رسم شبكة الأعمال لهذا المشروع؟ و تحديد مختلف المسارات و المسار الحرج؟
2. تحديد المدة العادية لإنجاز المشروع و التكلفة الكلية العادية في ظل هذا الوقت؟
3. تحديد المدة السريعة لإنجاز المشروع و التكلفة الكلية السريعة في ظل هذا الوقت؟
4. تحديد الأزمنة المبكرة و المتأخرة لبداية و نهاية كل نشاط؟
5. تحديد المدة المثلى لإنجاز المشروع و التكلفة الكلية في ظل هذا الوقت؟

الفصل الرابع: نظرية المباريات

I.مفهوم نظرية المباريات

يعتبر كل من فيومان و مور مرجنسترن (1928)، أول من قدم نظرية المباريات ، كما أضاف ماكنزي عليها العديد من المعالجات الرياضية ، كذلك فإن مجهودات شارنز وكوبر قد أضافت الكثير إلى هذه النظرية.

وكانت أول محاولة لتطبيقها في المجال الاقتصادي عام 1933 حيث تمت دراسة المشاكل المتعلقة بالاحتكار الثنائي Duopoly أو المتعدد Oligopoly.

تشير **كلمة مباراة** "إلى الحالات العامة للتنافس خلال فترة زمنية محددة ، تحدث بين جهتين أو أكثر تسمى اللاعبين ، لكل منهم عدد محدد أو غير محدد من الاستراتيجيات ، و تختصر نتائج المنافسة في مصفوفة تدعى مصفوفة الدفع Payoff بإعتبارها دالة للسياسات المختلفة للمتنافسيين ، وتعد تلك النتائج مقياس للفعالية أو التأثير ، ويعبر عنها بالأموال أو النسب المالية أو المنفعة أو غيرها من مقاييس التأثير.

أما **نظرية المباريات** ماهي إلا أداة من الأدوات الرياضية التي تساهم بشكل كفء و فعال في حل المشكلات التي تواجه متخذي القرارات عند قيامهم بالبحث عن الاستراتيجيات المثلى سواء كانت استراتيجيات الخصم معروفة أو غيلر معروفة .

في ضوء ذلك تهتم نظرية المباريات بإجراء تحليلات رياضية لاستراتيجيات اللاعبين في مواقف الصراع أو التنافس المختلفة و التي تتم في ضوء أسس و قواعد معروفة مسبقا.

II.الفرضيات التي تقوم عليها نظرية المباريات

تقوم نظرية المباريات على مجموعة من الفرضيات أهمها مايلي:

1. يشترك في المباراة لاعبين أو أكثر ، وفي الحالة الأخيرة ينبغي أن يكون عددا محددا.
2. يواجه كل لاعب عدد محدودا من الإختيارات.
3. إتخاذ لاعب معين قراره يؤثر على عائده و على عائدات اللاعبين الآخرين المشتركين معه في المباراة.
4. نفترض أن عملية إتخاذ القرارات تتم في آن واحد من قبل جميع اللاعبين المشتركين في المباراة.
5. تسود حالة التأكد التام ،. بمعنى أن أي لاعب مشترك في المباراة يدرك أن العائد من تطبيق إستراتيجية معينة معروف و مؤكد.

6. عدم إطلاع اللاعبين على المواقف المتوقعة التي سوف يتخذها المنافسون على وجه التحديد.
7. اللاعبون في المباراة يتمتعون بالرشد و المنطق في إتخاذ قراراتهم.
8. لكل لاعب في المباراة عدد محدود من الاختيارات .

III.المصطلحات المتعلقة بنظرية المباريات

1. **اللاعب Player**:هو شخص طبيعي ، أو فريق يتكون من الأفراد الطبيعيين ، كما قد يكون من الأشخاص ذات الصفة المعنوية ، كما قد يكون جهة غير مدركة ليس لها الصفة المعنوية مثل المناخ.
2. **الاستراتيجية Strategy**: هي مجموعة من الخطوات التي يتم من خلالها تحقيق أهداف جهة معينة في تعظيم أرباحها أو تدنية خسائرها.
3. **عائد الاستراتيجية Payoff**: و تمثل النتائج المترتبة عن إتباع استراتيجية معينة ، ويشار الى الربح بعدد موجب و الخسارة بعدد سالب.
4. **مصفوفة الدفع Payoff Matrix** : هي عبارة عن المجموعة المكونة من العوائد التي يمكن للمتنافس تحقيقها في ظل استخدام مختلف التوليفات من الخطط الممكنة لمقابلة خطط المنافس.

IV.أنواع المباريات

يمكن تلخيص أنواع المباريات إستنادا إلى المعايير التالية:

1. مباراة الحظ و المهارة: تعد المباراة مباراة حظ متى إعتمدت نتيجة المباراة من هذا النوع على الحظ وحده ولا دخل للمهارة في تحديد نتيجة المباراة مثل سحب اليانصيب ، ويقال أن المباراة مباراة مهارة متى إعتمدت نتيجة المباراة من هذا النوع على المهارة وحدها و لا دخل للحظ في تحديد نتيجة المبارة مثل الألعاب الرياضية الفردية.

أما مباريات الحظ و المهارة فإنها تشير إلى إعتماد المباراة على إمتزاج الحظ و المهارة في تحديد نتيجتها مثل التسويق و المعارك الحربية.

2. يمكن تصنيف المباريات إستنادا إلى عدد المنافسين ، فإذا كان عدد المتنافسين إثنين تسمى مباراة ثنائية Tow Persons Game، أما إذا كان عدد المتنافسيين أكثر من إثنين تسمى مبارة متعددة الأطراف N-Persons Game.

3. تعد المباراة ذات مجموع صفري Zero Sum Game متى كان مجموع الرباح و الخسائر مساويا للصفر ، وفيما عدا ذلك تسمى مباراة بمجموع غير صفري Non Zero Sum Game.
4. تصنف المباريات إستنادا إلى عددالاستراتيجيات المعتمدة إلى محدودة finit وغير محدودة Infini.

سوف تقتصر دراستنا على المباريات الثنائية الصفرية.

V.صياغة مصفوفة الدفع للمباريات الثنائية ذات مجمع صفري

مباراة الشخصين ذات المجموع الصفري تلعب بواسطة متنافسين أو مجموعتين بحيث أن ربح احد المتنافسين يساوي بالضبط خسارة المتنافس الثاني ، ولذلك فإن مجموع أرباح وخسائر المتنافسين يساوي صفر ، وعلى هذا الأساس على المباراة بمباراة ذات المجموع الصفري ، إن كل متنافس يمتلك مجموعة من افستراتيجيات بحيث أن ناتج كل إستراتيجية يكون معلوم مسبقا لدى المتنافسيين و يعبر عنه بقيم رقمية بما ان ربح احد المتنافسين يمثل خسارة المتنافس الثاني يمكن صياغة مصفوفة الدفع وفق الجدول التالي:

		اللاعب B			
		y_1	y_2	...	y_n
اللاعب A	x_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
	x_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...
	x_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

يسمى اللاعب A بلاعب الصف أما اللاعب B بلاعب العمود أما:

$\{x_i = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$: تمثل الاستراتيجيات المتاحة للاعب A حيث: $\mathrm{i} = \overline{1,2,\dots,\mathrm{m}}$.

$\{y_j = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$: تمثل الاستراتيجيات المتاحة للاعب A حيث: $\mathrm{j} = \overline{1,2,\dots,\mathrm{n}}$.

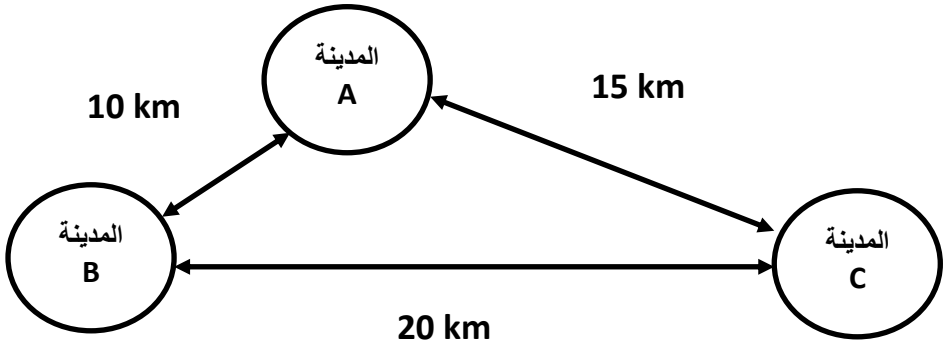
a_{ij} : تمثل العائد المتوقع إذا لعب اللاعب A الاستراتيجية i و اللاعب B الاستراتيجية j. فاذا كانت هذه القيمة موجبة فتعني أن اللاعب A يربح هذا المقدار و اللاعب B يخسر نفس المقدار ، في حالة كانت هذه القيمة سالبة فتعني أن اللاعب B يربح هذا المقدار و اللاعب Aيخسر نفس المقدار.

لتوضيح ماسبق نقدم المثال التالي:

VI.تطبيق 1

يعمل متجرين كبيرين على إنشاء مخزن في منطقة ريفية يخدم ثلاثة مدن ، يبين الشكل اللاحق المسافات بين المدن يعيش 45% من تعداد المنطقة بالقرب من المدينة A ، ويعيش 35% بالقرب من المدينة B ، ويعيش 20% بالقرب من المدينة C ، وبسبب السمعة الطيبة للمتجر 1 و كبر حجمه عن المتجر 2 فإن المتجر 1 سيتحكم في معظم الأعمال إذا قارنا وضعيتهما . يخشى كلا المتجرين من اهتمامات الآخر في المنطقة .

استكمل كل متجر بحوث التسويق التي أعطت دلالات متشابهة ، فإذا وقع كلا المتجرين في نفس المدينة أو على مسافة متساوية من مدينة ما فإن المتجر 1 سيتحكم في 65% من حجم الأعمال في هذه المدينة ، وإذا كان المتجر 1 أقرب من مدينة ما عن المتجر 2 فإن المتجر 1 سيتحكم في 90% من حجم الأعمال في هذه المدينة ، وإذا كان المتجر 1 أبعد من مدينة ما عن المتجر 2 فإنه سيأخذ 40% من حجم الأعمال في هذه المدينة ، ويذهب باقي حجم الأعمال في كل الحالات إلى المتجر 2 ، بالإضافة إلى ذلك فإن سياسة المتجر1 هي عدم التواجد في المدن الصغيرة و تقع المدينة C داخل هذه الفئة.



الحل:

لدينا:

اللاعبون : المتجر1 و المتجر2.

الاستراتيجيات المتاحة أمام المتجر1 هي : التواجد في المدينة A أو التواجد في المدينة B.

الاستراتيجيات المتاحة أمام المتجر2 هي: التواجد في المدينة A ، التواجد في المدينة B أو التواجد في المدينة C.

نفرض أن المتجر1 هو لاعب الصف بإعتباره المتحكم في الأعمال و المتجر2 هو لاعب العمود . لهذا سوف ننظر للمباراة من وجهة نظر المتجر1، عندئذ تصبح النتائج المترتبة عن إستعمال كل استراتيجية من طرف المتجرين كما يلي:

- ✓ **المتجر1 و المتجر2 متواجدون في المدينة A** : يتحصل المتجر1 على 65% من حجم الأعمال لأن كلا المتجرين يقع في نفس المدينة.
- ✓ **المتجر1 متواجد في المدينة A و المتجر2 متواجد في المدينة B** : في هذه الحالة يكون المتجر1 أقرب إلى المدينةA من المتجر2 و يكون أبعد عن المدينةB من المتجر2 ، و يكون أقرب للمدينة C من المتجر2 و بالتالي يتحصل على النسب التالية 90%، 40%،90% من حجم سكان المدينة C،B،A على التوالي ، و بالتاي يكون حجم أعماله في كل المدن كمايلي:

$$(0.9\times0.45)+(0.4\times0.35)+(0.9\times0.2)=0.725=72.5\%$$

- ✓ **المتجر1 متواجد في المدينة A و المتجر2 متواجد في المدينة C** : في هذه الحالة يكون المتجر1 أقرب إلى المدينةA من المتجر2 و يكون أقرب للمدينةB من المتجر2 ، و يكون أبعد عن المدينة C من المتجر2 و بالتالي يتحصل على النسب التالية 90%، 90%،40% من حجم سكان المدينة C،B،A على التوالي ، و بالتاي يكون حجم أعماله في كل المدن كمايلي:

$$(0.9\times0.45)+(0.9\times0.35)+(0.4\times0.2)=0.8=80\%$$

- ✓ **المتجر1 متواجد في المدينة B و المتجر2 متواجد في المدينة A** : في هذه الحالة يكون المتجر1 أبعد عن المدينةA من المتجر2 و يكون أقرب للمدينةB من المتجر2 ، و يكون أبعد عن المدينة C من المتجر2 و بالتالي يتحصل على النسب التالية 40%، 90%،40% من حجم سكان المدينة C،B،A على التوالي ، و بالتاي يكون حجم أعماله في كل المدن كمايلي:

$$(0.4\times0.45)+(0.9\times0.35)+(0.4\times0.2)=0.575=57.5\%$$

- ✓ **المتجر1 و المتجر2 متواجدون في المدينة B** : يتحصل المتجر1 على 65% من حجم الأعمال لأن كلا المتجرين يقع في نفس المدينة.
- ✓ **المتجر1 متواجد في المدينة B و المتجر2 متواجد في المدينة C** : في هذه الحالة يكون المتجر1 أقرب للمدينةA من المتجر2 و يكون أقرب للمدينةB من المتجر2 ، و يكون أبعد عن المدينة C من المتجر2 و بالتالي يتحصل على النسب التالية 90%، 90%،40% من حجم سكان المدينة C،B،A على التوالي ، و بالتاي يكون حجم أعماله في كل المدن كمايلي:

$$(0.9\times0.45)+(0.9\times0.35)+(0.4\times0.2)=0.8=80\%$$

من خلال ماسبق يمكن صياغة مصفوفة الدفع كمايلي:

		إستراتيجيات المتجر2		
		التواجد في المدينة A	التواجد في المدينة B	التواجد في المدينة C
إستراتيجيات المتجر1	التواجد في المدينة A	65	72.5	80
	التواجد في المدينة B	57.5	65	80

VII.تطبيق 2

أنشئ مصفوفة الدفع للمباراة التالية: يحتوي برميل على عدد متساو من الكرات الحمراء و الخضراء ، يختار اللاعب1 عشوائيا كرة واحدة ، ويفحص لونها دون أن يراها اللاعب2 ، إذا كانت الكرة حمراء يقول اللاعب1 "حصلت على كرة حمراء" ، ويطلب من اللاعب2 دولار واحد، وإذا كانت الكرة خضراء يقول اللاعب1 "الكرة خضراء" و يدفع للاعب2 دولار واحدا، أو يقوم اللاعب1 بالخداع بقوله "الكرة حمراء" و يطلب دولارا من اللاعب2 ، وعندما يطلب اللاعب1 دولارا، فإن اللاعب2 يمكنه أن يدفع أو يتحدى اللاعب1 في معرفة لون الكرة إذا ما كانت حمراء أو لا .عند التحدي يجب أن يظهر اللاعب1 الكرة للاعب2، و إذا كانت حمراء فعلا ، يدفع اللاعب2 للاعب1 دولارين ، و إذا لم تكن حمراء يدفع اللاعب1 للاعب2 دولارين.

الحل

اللاعب1 يمتلك إستراتيجيتان مطلقتان هما :

الاستراتيجية الأولى: أن يعلن اللون الحقيقي للكرة .

الاستراتيجية الثانية: أن يعلن أن لون الكرة حمراء سواء أكانت كذلك أم لا.

اللاعب2 يمتلك إستراتيجيتان مطلقتان هما :

الاستراتيجية الأولى: أن يصدق اللاعب1 .

الاستراتيجية الثانية: أن يصدقه إذا أعلن أن الكرة خضراء ، و أن يتحداه إذا أعلن أن الكرة حمراء.

بما أن ما يكسبه أحدهما يخسره الثاني تعتبر المباراة ثنائية بمحصلة صفرية.

في هذه المباراة نجد أن مصفوفة الدفع المرتبطة بالاستراتيجيات المطلقة تكون متغيرات عشوائية و نستبدلها بقيمها المتوقعة لذلك تكون a_{11} هي الربح المتوقع للاعب1 إذا أعلن اللاعب1 اللون الحقيقي للكرة المختارة و يصدقه اللاعب2 ، و حيث أن نصف عدد المرات تكون الكرة حمراء ، و النصف الآخر تكون خضراء ، فإن:

$$a_{11} = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1) = 0$$

العائد a_{12} هو العائد المتوقع للاعب1 عندما يعلن اللاعب1 اللون الحقيقي للكرة و يتحداه اللاعب2 عند إعلان أن الكرة حمراء ، وحيث أن الكرة لها إحتمال لتكون بأحد اللونين ، فإن نصف عدد المرات لن يكون هناك تحد ، و اللاعب2 سيتحدى نصف المرات و يخسر لذلك:

$$a_{12} = \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(2) = \frac{1}{2}$$

العائد a_{21} هو العائد المتوقع للاعب1 عندما يعلن اللاعب1 أن يعلن أن لون الكرة حمراء سواء أكانت كذلك أم لا و يصدقه اللاعب2 ، و يدفع له دولار دون أن يتحداه لذلك

$$a_{21} = 1$$

العائد a_{22} هو العائد المتوقع للاعب1 عندما يعلن اللاعب1 أن يعلن أن لون الكرة حمراء سواء أكانت كذلك أم لا و يتحداه اللاعب2 لأنه أعلن أنها حمراء ، وحيث أن الكرة لها إحتمال لتكون بأحد اللونين ، فإن نصف عدد المرات ينجح اللاعب2 في التحد، و يخسر نصف المرات لذلك:

$$a_{22} = \frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{2}(2) = 0$$

تجمع هذه النتائج بالجدول التالي الذي يمثل مصفوفة الدفع لهذه المباراة

		إستراتيجيات اللاعب2	
		يصدقه مهما كان لون الكرة	يصدقه إذا كانت خضراء و يتحداه إذا كانت حمراء
إستراتيجيات اللاعب1	يعلن اللون الحقيقي للكرة	0	1/2
	يعلن أن لون الكرة حمراء سواء أكانت كذلك أم لا	1	0

VIII.المباريات المستقرة و نقطة التوازن

طبقا لهذا النوع من المباريات يكون أمام كل طرف إستراتيجية واحدة مثلى من بين عدة إستراتيجيات متاحة يلعب بها خلال زمن المباراة بغية تحقيق إما أقصى عائد أو أقل خسارة و لتوضيح فكرة نقطة التوازن (النقطة السرجية) نصوغ التطبيق $(1-1)$ التالي:

لنتصور أن أحد عقود الإمتيازات الفوسفاتية الممنوحة لإحدى الشركات العالمية المنقبة عن الفوسفات قد قارب إلى الإنتهاء ، وأنه يجب التفاوض من جديد بين الحكومة وبين تلك الشركة لوضع عقد جديد و ذلك قبل إنتهاء عقد الإمتياز الأول.

لنفرض أن فريق حكومي في المفاوضات قرر إستخدام الاستراتيجيات التالية:

- ✓ الإستراتيجية الاولى (x_1) : اللجوء غلى الشدة في المساومة لكسب أكبر ما يمكن.
- ✓ الإستراتيجية الثانية (x_2) : اللجوء إلى التفاهم و الأسلوب المنطقي.
- ✓ الإستراتيجية الثالثة (x_3) : اللجوء إلى الأسلوب القانوني و العرف السائد.
- ✓ الإستراتيجية الرابعة (x_4) : اللجوء إلى الموافقة و أسلوب التقارب و التنازل.

و تتوقف الإستراتيجية المثلى للفريق المفاوض الحكومي على الإستراتيجية التي يتبعها فريق الشركة المفاوض ، ومن الطبيعي أن الفريق الأول لا يعرف إستراتيجيات الفريق الثاني ، ولكن لو فرضنا أن الاستراتيجيات التي إتبعتها الشركة في الماضي كانت مجموعة الاستراتيجيات التالية:

- ✓ الإستراتيجية الاولى (y_1) : اللجوء غلى الشدة في المساومة لكسب أكبر ما يمكن.
- ✓ الإستراتيجية الثانية (y_2) : اللجوء إلى التفاهم و الأسلوب المنطقي.
- ✓ الإستراتيجية الثالثة (y_3) : اللجوء إلى الأسلوب القانوني و العرف السائد.

✓ الإستراتيجية الرابعة (y_4) : اللجوء إلى الموافقة و أسلوب التقارب و التنازل.

و عليه فإنه علينا أن نتبين عن كل إستراتيجية يتبعها فريق الحكومة المفاوض ، علما أن فريق الشركة أي غستراتيجية معينة من إستراتيجياتهم .

بفرض أننا إستطعنا وضع الجدول التالي الذي يوضح الإستراتيجيات التي سيتبعها كل فريق.

جدول الدخل الحكومي المشروط عن إنتاج كل طن من الفوسفات بالدينار

		فريق الشركة			
		y_1	y_2	y_3	y_4
فريق الحكومة	x_1	20	15	12	35
	x_2	25	14	8	10
	x_3	40	2	10	5
	x_4	-5	4	11	0

بالنظر إلى الجدول أعلاه يتضح أن الحكومة لن تلجأ على الإطلاق إلى (x_4) لأن إتباع (x_1) سيعني زيادة أكبر مهما كانت الإستراتيجية التي تتبعها الشركة و ذلك لأن أرقام (x_1) أكبر من الأرقام المقابلة لها في الخط (x_4) لذا يقال أن الإسترتيجية (x_1) تسيطر على الإستراتيجية (x_4).

هذا ويجب ملاحظة أن في أسوأ الظروف سوف تحصل الحكومة على زيادة قدرها ما يلي:

- عند إتباع (x_1) تكون الزيادة تساوي 12 دينار.
- عند إتباع (x_2) تكون الزيادة تساوي 8 دينار.
- عند إتباع (x_3) تكون الزيادة تساوي 2 دينار.
- عند إتباع (x_4) سينخفض الدخل الحكومي بمقدار 5 دينار.

و حيث أن الحكومة تهدف إلى تحقيق أقصى دفع ممكن لأقل زيادة ممكنة بالإنتاج فإن الحكومة ستختار (x_1) و ذلك لتحصل على زيادة في الدخل عن كل طن فوسفات ينتج و قدرها 12 دينار.

كذلك يجب ملاحظة أنه في أسوأ الظروف سوف تدفع الشركة للحكومة مبلغ قدره مايلي:

- عند إتباع (y_1) ستدفع الشركة مبلغ يساوي 40 دينار.
- عند إتباع (y_2) ستدفع الشركة مبلغ يساوي 15 دينار.
- عند إتباع (y_3) ستدفع الشركة مبلغ يساوي 12 دينار.

- عند إتباع (y_4) ستدفع الشركة مبلغ يساوي 35 دينار.

وحيث أن الشركة تهدف إلى دفع أقل قدر ممكن لأقصى زيادة ممكنة بالإنتاج فإنها ستختار الإستراتيجية التي في اسوا الظروف ستدفع بموجبها أقل ما يمكن ، ومما سبق يتضح أن الإستراتيجية التي تحقق هذا الهدف هي (y_3) حيث ستدفع الشركة بموجبها 12 دينار ، لذا فإن الجدول يعطي حلا توازنيا .

من خلال تحليل أرقام مصفوفة الدفع فإنه يمكن تحديد نقطة السرج (Saddle Point) أو نقطة التوازن التي تنتج عن تبني كل طرف من أطراف المباراة للإستراتيجية المثلى التي يستخدمها خلال زمن المباراة ، وتتحدد هذه النقطة عند الرقم الذي تتقاطع عنده الإستراتيجية المثلى التي يتبناها الطرف الأول مع الإستراتيجية المثلى التي يتبناها الطرف الثاني.

و بالتالي فإن نقطة السرج (التوازن) هي النقطة التي يرتاح عندها كل طرف من أطراف المباراة و يرضيان بنتيجتها ، كما أن قيمة نقطة السرج هي التي تحدد قيمة المباراة.

و مما هو جدير بالذكر في هذا الصدد أنه يتم إستخدام معيار تقليل الأعظم و تعظيم الأقل Minimax-Maximin لتمكين كل طرف من طرفي المباراة من إختيار الإستراتيجية المثلى له سواء كانت خالصة أو مركبة بحيث يحقق الهدف الذي يسعى إليه من تعظيم لمكسب أو تدنية الخسارة .

تكون المباراة مستقرة عند نقطة السرج (التوازن) و ذلك عندما تتساوى قيمة تقليل الأعظم Minimax مع تعظيم الأقل Maximin و تتحدد قيمة المباراة النهائية بالقيمة المشتركة لهما بمعنى:

$$\max_j \min_i a_{ij} = v = \min_i \max_j a_{ij}$$

حيث v تعبر عن قيمة المباراة.

و لحساب نقطة التوازن في المباريات المستقرة نتبع الخطوات التالية:

1. نحدد أقل قيمة في كل صف i و نضعها أمام الصف الذي تنتمي إليه.
2. نحدد أكبر قيمة من القيم التي تم إيجادها في الخطوة (1).
3. نحدد أكبر قيمة في كل عمود j و نضعها أمام العمود الذي تنتمي إليه.
4. نحدد أقل قيمة من القيم التي تم إيجادها في الخطوة (3).
5. إذا تساوت القيمة الموجودة في الخطوة (2) مع القيمة الموجودة في الخطوة (4) نقول أن المبارة مستقرة و تلك القيمة هي نتيجتها.

يمكن توضيح الخطوات السابقة في الجدول التالي:

		اللاعب B				$\min_i a_{ij}$
		y_1	y_2	...	y_n	
اللاعب A	x_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$\min_{i=1} a_{1j}$
	x_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	$\min_{i=2} a_{2j}$
	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...
	x_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	$\min_{i=m} a_{mj}$
	$\max_j a_{ij}$	$\max_{j=1} a_{i1}$	$\max_{j=2} a_{i2}$	...	$\max_{j=n} a_{in}$	

نقطة الإستقرار (التوازن)

$$\min_i \max_j a_{ij} = \max_j \min_i a_{ij}$$

IX.تطبيق

لتكن لديك مصفوفة الدفع التالية و المطلوب إيجاد نتيجة المباراة

		اللاعب B			$\min_i a_{ij}$
		y_1	y_2	y_3	
اللاعب A	x_1	1	9	2	1
	x_2	8	5	4	4^*
	$\max_j a_{ij}$	8	9	4^*	$v = 4$

نلاحظ أن المبارة مستقرة ويجب على اللاعب A أن يلعب بالإستراتيجية (x_2) و أن يلعب اللاعبB بالاستراتيجة (y_3) طوال زمن المباراة ليتحصلا في الأخير على نتيجة قدرها $v = 4$ تمثل هذه النتيجة ربح للاعب A و خسارة للاعبB و تعبر هذه النتيجة نقطة توازن لكلا الطرفين.

X.تخفيض حجم مصفوفة الدفع بإستخدام قواعد السيطرة

يتم بمقتضى هذه الطريقة حذف بعض الإستراتيجيات (صفوف أو أعمدة) و التي لا تؤثر في قيمة المباراة ، حيث لا تمثل أية إضافة حقيقية لأي طرف من طرفي المباراة و بالتالي فإنه لا يوجد مبرر للإبقاء عليها أو إستخدامها.

و يتم تطبيق قاعدة السيطرة من خلال إتباع الخطوات التالية:

- ✓ إذا كانت أرقام أحد الصفوف أقل أو تساوي نظائرها في صف آخر ، عندئذ يمكن إعتبار أرقام هذا الصف الأقل إستراتيجية مسيطر عليها و بالتالي يمكن حذفها من المباراة .
- ✓ إذا كانت أرقام أحد الأعمدة أكبر أو تساوي نظائرها في عمود آخر ، عندئذ يمكن إعتبار أرقام هذا العمود الأكبر إستراتيجية مسيطر عليها و بالتالي يمكن حذفها من المباراة .

ملاحظات

1. يسمى الصف ذو الأرقام الأكبر بالاستراتيجية المسيطرة، كذلك بالنسبة للعمود ذو الأرقام الأقل.
2. عند محاولة إختزال مصفوفة الدفع يمكن البدء بالأسطر أو الأعمدة لا على التعين.
3. حذف الأسطر أو الأعمدة لا يؤثر على نتيجة المباراة.
4. إذا كان هناك سطر أو عمود غير قابل للإختزال ثم قمنا بحذف عمود أو سطر فإن ذلك السطر قد يصبح قابل للإختزال لذلك فإن عملية الإختزال تستمر حتى تصبح كل الصفوف و الأعمدة غير قابلة للإختزال.
5. يمكن حذف أكثر من سطر أو عمود في آن واحد.
6. في بعض الحالات يمكن تخفيض حجم مصفوفة الدفع حتى تبقى استراتيجية واحدة لكل طرف و تعتبر هذه الاستراتيجية حل للمباراة.

يمكن توضيح كيفية تخفيض حجم مصفوفة الدفع عن طريق السيطرة من خلال التطبيق السابق التالي:

توفرت لديك مصفوفة الدفع التالية :

		اللاعب الثاني			
		B_1	B_2	B_3	B_4
اللاعب الأول	A_1	16	14	6	11
	A_2	-14	4	-10	-8
	A_3	0	-2	12	-6
	A_4	12	-12	6	10

و **المطلوب** : تخفيض مصفوفة المباراة إلى أقصى حد ممكن .

الحل

نلاحظ أن عناصر الصف رقم (1) أكبر من عناصر الصف (2) و الصف (4) ، و هذا يعني أن كل من الصف (2) و (4) مسيطر عليهم (مهيمن عليهم) من قبل الصف (1) لذا يجب حذفهم من مصفوفة الدفع.

		اللاعب الثاني			
		B_1	B_2	B_3	B_4
اللاعب الأول	A_1	16	14	6	11
	A_2	**-14**	**4**	**-10**	**-8**
	A_3	0	-2	12	-6
	A_4	**12**	**-12**	**6**	**10**

نلاحظ أن عناصر العمود رقم (2) أقل من عناصر العمود (1) و بالتالي العمود (1) مسيطر عليه من قبل العمود (2) لذا يجب حذفه من مصفوفة الدفع.

		اللاعب الثاني			
		B_1	B_2	B_3	B_4
اللاعب الأول	A_1	**16**	14	6	11
	A_2	**-14**	**4**	**-10**	**-8**
	A_3	**0**	-2	12	-6
	A_4	**12**	**-12**	**6**	**10**

نلاحظ أن عناصر العمود رقم (4) أقل من عناصر العمود (2) و بالتالي العمود (2) مسيطر عليه من قبل العمود (4) لذا يجب حذفه من مصفوفة الدفع.

		اللاعب الثاني			
		B_1	B_2	B_3	B_4
اللاعب الأول	A_1	16	14	6	11
	A_2	−14	4	−10	−8
	A_3	0	−2	12	-6
	A_4	12	−12	6	10

بما أنه لايوجد سطر يسيطر على سطر آخر و لا عمود يسيطر على عمود آخر أصبحت المصفوفة غير قابلة للاختزال و معطاة بالجدول التالي:

	B_3	B_4
A_1	6	11
A_3	12	-6

XI.المباريات غير المستقرة

تكون المباراة غير مستقرة في حالة عدم وجود نقطة توازن بإستراتيجية خالصة لهذا يسعي اللاعبون في المباراة إلى البحث عن هذه النقطة بإستخدام إستراتيجيات مختلطة يلعبون بكل واحدة فترة من زمن المباراة (نسبة من وقت المباراة) ، سعيا وراء تحقيق أهدافهم إما بتعظيم المكسب إلى اكبر قدر ممكن أو تخفيض الخسارة غلى ادنى حد ممكن.

إن عدم تساوي القيمتين Maximin بالنسبة للاعب الصف و Minimax بالنسبة للاعب العمود يؤدي إلى كون المباراة غير مستقرة و تتحدد قيمتها النهائية بالمتباينة التالية:

$$\max_j \min_i a_{ij} < v < \max_j \min_i a_{ij}$$

توجد عدة طرق يمن إستخدامها في تحديد الاستراتيجيات المثلى في المبارايات غير المستقرة تختلف بختلاف حجم مصفوفة الدفع .

سنتناول كل طريقة بالشرح والتوضيح من خلال الأمثلة العملية.

XI.1.المباريات من الحجم 2×2

في هذا النوع من المباريات يكون أمام كل لاعب في المباراة إستراتيجيتان فقط يلعب بهما خلال فترة المباراة، وتوجد عدة طرق يكن إستخدامها لحل مثل هذا النوع من المباريات أهمها:

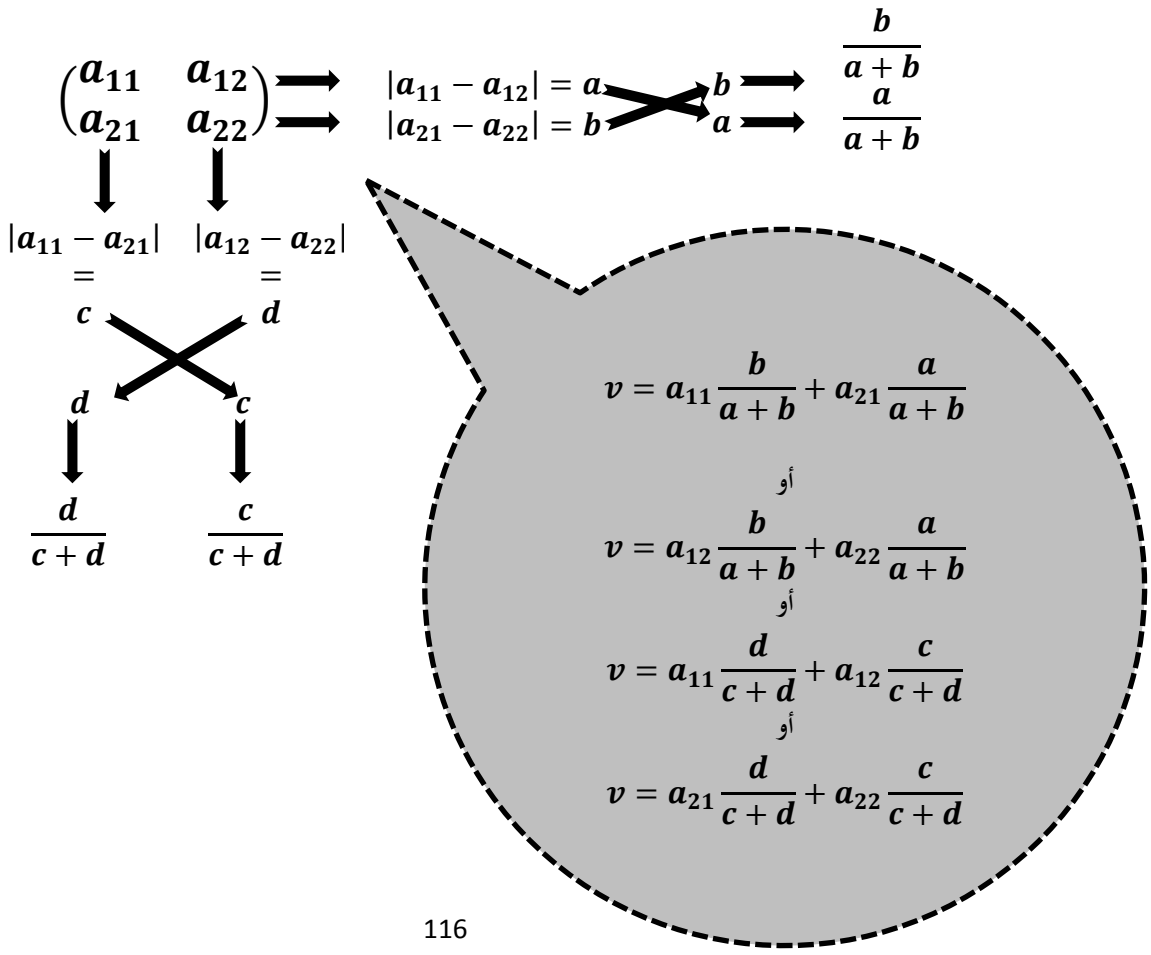
- الطريقة الحسابية – الطريقة الجبرية

XI.1.1.الطريقة الحسابية

تطبق هذه الطريقة على مصفوفة الدفع من الحجم 2×2 فقط في حالة عدم وجود نقطة توازن ، وللتوصل لحل المباراة وفق هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

1. نطرح أكبر قيمة من أقل قيمة في كل صف و نأخذ الناتج بالقيمة المطلقة و نضعه أمام الصف الخاص به.
2. نطرح أكبر قيمة من أقل قيمة في كل عمود و نأخذ الناتج بالقيمة المطلقة و نضعه أمام العمود الخاص به.
3. نقوم بتبديل مواقع نتائج الطرح بالنسبة للصوف و كذلك الأعمدة.
4. نقسم كل قيمة مبدلة للصف على مجموع القيم المبدلة للصفوف فنتحصل على الزمن الذي بلعب به لاعب الصف كل إستراتيجية خلال المباراة.
5. نقسم كل قيمة مبدلة للعمود على مجموع القيم المبدلة للأعمدة فنتحصل على الزمن الذي بلعب به لاعب العمود كل إستراتيجية خلال المباراة.

و الشكل التالي يوضح كيفية حل المباريات من الحجم 2×2 بواسطة الطريقة الحسابية.



تطبيق 1

أوجد الإستراتيجيات المثلى و قيمة المباراة لمصفوفة الدفع التالية:

$$\begin{bmatrix} -19 & 55 \\ 46 & -37 \end{bmatrix}$$

أولا: يجب التأكد من عدم وجود نقطة توازن

$$\begin{bmatrix} -19 & 55 \\ 46 & -37 \end{bmatrix} \begin{matrix} -19 \\ -37 \end{matrix} \rightarrow \text{maximin}$$

$$\text{minimax} \longrightarrow \quad 46 \qquad 55$$

إن المباراة لا تحتوي على نقطة توازن و بالتالي قيمتها محصورة بين:

$$-19 < v < 46$$

سوف نتبع الطريقة الحسابية لحل هذه المباراة كالآتي:

1. نطرح أكبر قيمة في كل صف من أقل قيمة فيه ، وكذلك أكبر قيمة في كل عمود من أقل قيمة فيه و يوضع الناتج بالقيمة المطلقة.

$$\begin{bmatrix} -19 & 55 \\ 46 & -37 \end{bmatrix} \begin{matrix} 74 \\ 83 \end{matrix}$$

$$65 \qquad 92$$

2. نبادل أماكن زوجي الأرقام الذي حصلنا عليها

$$\begin{bmatrix} -19 & 55 \\ 46 & -37 \end{bmatrix} \begin{matrix} 83 \\ 74 \end{matrix}$$

$$92 \qquad 65$$

نقسم الأرقام المبدلة على مجموع الأرقام المبدلة فنحصل على نسب لعب كل إستراتيجية من طرف كل لاعب في المباراة.

$$\begin{bmatrix} -19 & 55 \\ 46 & -37 \end{bmatrix} \begin{matrix} 83/157 \\ 74/157 \end{matrix}$$

$$\frac{92}{157} \qquad \frac{65}{157}$$

إن لاعب الصف سوف يلعب بإستراتيجيه الأولى(صفه الأول) بنسبة $\frac{83}{157}$ من الوقت ، و إستراتيجيته الثانية (صفه الثاني) بنسبة $\frac{74}{157}$ من الوقت ، أما لاعب العمود فسيلعب بإستراتيجيه الأولى(عموده الأول) بنسبة $\frac{92}{157}$ من الوقت ، و إستراتيجيته الثانية (عموده الثاني) بنسبة $\frac{65}{157}$ من الوقت.

أما قيمة المباراة فيمكن الحصول عليها كالآتي:

$$v = \left(-19 \times \frac{83}{157}\right) + \left(46 \times \frac{74}{157}\right) = \frac{1827}{157}$$

أو

$$v = \left(55 \times \frac{83}{157}\right) + \left(-37 \times \frac{74}{157}\right) = \frac{1827}{157}$$

بما أن قيمة المباراة موجبة تكون لصالح لاعب الصف ، أما الخسارة المتوقعة للاعب العمود فهي:

$$v = \left(-19 \times \frac{92}{157}\right) + \left(55 \times \frac{65}{157}\right) = \frac{1827}{157}$$

أو

$$v = \left(46 \times \frac{92}{157}\right) + \left(-37 \times \frac{65}{157}\right) = \frac{1827}{157}$$

XI.2.1.الطريقة الجبرية

تطبق هذه الطريقة أيضا على مصفوفة الدفع من الحجم 2×2 فقط في حالة عدم وجود نقطة توازن يتم إستخدام الطريقة الجبرية عن طريق فرض أن لاعب الصف سوف يخصص نسبة من الوقت p_1 يلعب بها الإستراتيجية الأولى (الصف الأول) و بالتالي يتم تخصيص الوقت المتبقي $p_2 = 1 - p_1$ للإستراتيجية الثانية (الصف الثاني) ،كما أن الطرف الثاني (لاعب العمود) سوف يخصص نسبة من وقته قدرها q_1 يلعب بها الإستراتيجية الأولى (العمود الأول) ، و بالتالي يتم تخصيص الوقت المتبقي $q_2 = 1 - q_1$ للإستراتيجية الثانية (العمود الثاني) ، يمكن توضيح ذلك على مصفوفة الدفع كما يلي:

$$\begin{matrix} \\ p_1 \\ p_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} q_1 & q_2 \end{matrix}$$

لإيجاد قيم p ، q فإن الأمر يتطلب ضرورة تحليل المباراة مرتان ، مرة من وجهة نظر لاعب الصف بغض النظر عما سيفعله الخصم لاعب العمود ، والثانية من وجهة نظر لاعب العمود بغض النظر عما سيفعله الخصم لاعب الصف، و يمكن توضيح ذلك بالإستعانة بالجدول التالي :

القيمة المتوقعة للاعب الصف

الحالـــــــــــة	عندما يلعب بالعمود الأول	عندما يلعب بالعمود الأول
يلعب الصف الأول بـ p_1 من الوقت	$a_{11}p_1$	$a_{12}p_1$
يلعب الصف الأول بـ p_2 من الوقت	$a_{21}p_2$	$a_{22}p_2$
القيمة المتوقعة E	$a_{11}p_1 + a_{21}p_2$	$a_{12}p_1 + p_2a_{22}$

القيمة المتوقعة للاعب الصف عندما يلعب لاعب العمود عموده الأول:

$$E(x/y = 1) = a_{11}p_1 + a_{21}p_2$$

القيمة المتوقعة للاعب الصف عندما يلعب لاعب العمود عموده الثاني:

$$E(x/y = 2) = a_{12}p_1 + p_2a_{22}$$

بمساواة القيمة المتوقعة للاعب الصف عندما يلعب لاعب العمود بإستراتيجية العمود الأول مع المكسب المتوقع للاعب الصف أيضا عندما يلعب لاعب العمود بإستراتيجية العمود الثاني فإننا نتحصل على:

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = a_{12}p_1 + a_{22}p_2$$

$$(a_{11} - a_{12})p_1 + (a_{21} - a_{22})p_2 = 0 \dots\dots\dots (1)$$

و حيث أن:

$$p_1 + p_2 = 1 \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

بحل المعدلتين (1) و (2) ينتج:

$$p_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & (a_{21}-a_{22}) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11}-a_{12}) & (a_{21}-a_{22}) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(a_{22}-a_{21})}{(a_{11}-a_{12})-(a_{21}-a_{22})}$$

$$\boldsymbol{p_1 = \frac{(a_{22}-a_{21})}{(a_{11}-a_{12})-(a_{21}-a_{22})}}$$

$$p_2 = \frac{\begin{vmatrix} (a_{11}-a_{12}) & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11}-a_{12}) & (a_{21}-a_{22}) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(a_{11}-a_{12})}{(a_{11}-a_{12})-(a_{21}-a_{22})}$$

$$\boldsymbol{p_2 = \frac{(a_{11}-a_{12})}{(a_{11}-a_{12})-(a_{21}-a_{22})}}$$

أما قيمة المباراة v فتحدد بالتالي:

$$\boldsymbol{v = a_{11}p_1 + a_{21}p_2}$$
أو
$$\boldsymbol{v = a_{12}p_1 + a_{22}p_2}$$

القيمة المتوقعة للاعب العمود

الحالـــــــــــة	يلعب العمود الأول بـ q_1 من الوقت	يلعب العمود الثاني بـ q_2 من الوقت	القيمة المتوقعة E
عندما يلعب بالصف الأول	$a_{11}q_1$	$a_{12}q_2$	$a_{11}q_1 + a_{12}q_2$
عندما يلعب بالصف الثاني	$a_{21}q_1$	$a_{22}q_2$	$a_{21}q_1 + a_{22}q_2$

القيمة المتوقعة للاعب العمود عندما يلعب لاعب الصف صفه الأول:

$$E(y/x=1) = a_{11}q_1 + a_{12}q_2$$

القيمة المتوقعة للاعب العمود عندما يلعب لاعب الصف صفه الثاني:

$$E(y/x=2) = a_{21}q_1 + a_{22}q_2$$

بمساواة القيمة المتوقعة للاعب العمود عندما يلعب لاعب الصف بإستراتيجية الصف الأول مع المكسب المتوقع للاعب العمود أيضا عندما يلعب لاعب الصف بإستراتيجية الصف الثاني فإننا نتحصل على:

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = a_{21}q_1 + a_{22}q_2$$

$$(a_{11} - a_{21})q_1 + (a_{12} - a_{22})q_2 = 0 \dots\dots\dots (1)$$

و حيث أن:

$$q_1 + q_2 = 1 \dots\dots (2)$$

بحل المعدلتين (1) و (2) ينتج:

$$q_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & (a_{12} - a_{22}) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11} - a_{21}) & (a_{12} - a_{22}) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(a_{22} - a_{12})}{(a_{11} - a_{21}) - (a_{12} - a_{22})}$$

$$\boldsymbol{q_1 = \frac{(a_{22} - a_{12})}{(a_{11} - a_{21}) - (a_{12} - a_{22})}}$$

$$q_2 = \frac{\begin{vmatrix} (a_{11} - a_{21}) & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11} - a_{21}) & (a_{12} - a_{22}) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(a_{11} - a_{21})}{(a_{11} - a_{21}) - (a_{12} - a_{22})}$$

$$\boldsymbol{q_2 = \frac{(a_{11} - a_{21})}{(a_{11} - a_{21}) - (a_{12} - a_{22})}}$$

أما قيمة المباراة v فتحدد بالتالي:

$$v = a_{11}q_1 + a_{12}q_2$$
أو
$$v = a_{21}q_1 + a_{22}q_2$$

تطبيق 2

أوجد الإستراتيجيات المثلى لكل لاعب وقيمة المباراة بالإستخدام الطريقة الجبرية لمصفوفة الدفع التالية:

$$\begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 20 & 12 \end{bmatrix}$$

الحل

نفحص مصفوفة الدفع إذا كانت توجد لها نقطة توازن أم لا

$$\begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 20 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 12 \rightarrow \text{maximin} \end{matrix}$$

$$20 \quad 16 \longrightarrow \text{minimax}$$

$$12 < v < 16$$

يتضح أن المباراة لا تحتوي على نقطة توازن لهذا نحاول إيجاد قيمتها بالطريق الجبرية

لدينا:

$$a_{11} = 4\,, a_{12} = 16\,, a_{21} = 20\,, a_{22} = 12$$

$$p_1 = \frac{(12-20)}{(4-16)-(20-12)} = \frac{-8}{-20} = \frac{2}{5}$$

$$p_2 = \frac{(4-16)}{(4-16)-(20-12)} = \frac{-12}{-20} = \frac{3}{5}$$

$$q_1 = \frac{(12-16)}{(4-16)-(20-12)} = \frac{-4}{-20} = \frac{1}{5}$$

$$q_2 = \frac{(4-20)}{(4-16)-(20-12)} = \frac{-16}{-20} = \frac{4}{5}$$

$$v = 4\frac{2}{5} + 20\frac{3}{5} = \frac{68}{5}$$

أو

$$v = 16\frac{2}{5} + 12\frac{3}{5} = \frac{68}{5}$$

أو

$$v = 4\frac{1}{5} + 16\frac{4}{5} = \frac{68}{5}$$

أو

$$v = 20\frac{1}{5} + 12\frac{4}{5} = \frac{68}{5}$$

XI.2.حل المباريات من الحجم 2×m و n×2

في هذا النوع من المباريات يمتلك أحد اللاعبين إستراتيجيتين فقط و اللاعب الآخر يمتلك أكثر من إستراتيجيتين، إن هذا النوع من المباريات حين لايمتلك نقطة توازن لا يمكن حلها بالطريقة الحسابية و لا الجبرية لهذا نلجأ في حل هذا النوع من المباريات إلى أحد الطرق التالية:

- طريقة المباريات الفرعية
- الطريقة البيانية

XI.2.1.طريقة المصفوفات الفرعية

هناك العديد من المباريات من الحجم 2×m و n×2 و التي لا يمكن حلها عن طريق نقطة التوازن ، لذلك يمكن تجزئتها إلى مباريات فرعية من الحجم 2×2 و من ثم حل كل منها منفردة و ثم إختيار الحل الأمثل للمباراة الأصلية، و يجب التميز بين المباريات من الحجم 2×m و n×2 لأن الأولى ينظر إليها من منظور لاعب الصف و الثانية من منظور لاعب العمود .

المباريات من الحجم n×2

في هذه الحالة يمتلك لاعب الصف إستراتيجيتين فقط أما لاعب العمود يمتلك أكثر من إستراتيجيتين لهذا نقسم المباراة الأصلية إلى مباريات فرعية من الحجم 2×2 ثم نقوم بحلها بأحد طرق السابقة الحسابية أو الجبرية ثم نختار أقل قيمة من بين قيم المباريات الفرعية لتكون حلا للمباراة بإعتبار أنها تحل من وجهة نظر لاعب العمود .

و لتوضيح ما سبق نأخذ التطبيق (1-1) التالي:

حل المباراة التالية و أوجد قيمة المباراة.

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & -2 & 8 & -12 & 2 \\ -8 & 14 & -4 & 6 & 14 & 14 \end{bmatrix}$$

الحل

أولا: نفحص المباراة ما إن كانت تحتوي على نقطة توازن أم لا

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & -2 & 8 & -12 & 2 \\ -8 & 14 & -4 & 6 & 14 & 14 \end{bmatrix} \begin{matrix} -12 \\ -8 \end{matrix} \longrightarrow \text{maximin}$$

$$\begin{matrix} 6 & 14 & -2 & 8 & 14 & 14 \end{matrix}$$

$$\uparrow$$

minimax

نلاحظ أن المباراة لا تحتوي على نقطة توازن قيمتها محصورة بين:

$$-12 < v < -2$$

ثانيا: نحاول إختزال المصفوفة إلى أكبر قدر ممكن

نلاحظ أن قيم العمود رقم (3) أصغر تمام من قيم الأعمدة (2)،(4)،(6) و بالتالي هذه الأعمدة مسيطر عليها و يجب حذفها من مصفوفة الدفع فتصبح بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -12 \\ -8 & -4 & 14 \end{bmatrix}$$

بما أن مصفوفة الدفع أصبحت غير قابلة للإختزال نحاول تجزئتها إلى ثلاث مباريات فرعية من الحجم 2×2 كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ -8 & 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -12 \\ -4 & 14 \end{bmatrix}$$

ثالثا: نقوم بحل هذه المباريات الفرعية بالطريقة الحسابية

المباراة الفرعية الأولى

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2^* \\ -8 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 6 & -2^* \end{matrix}$$

المباراة الفرعية الأولى تحتوي على نقطة توازن حيث قيمه المباراه $v = -7$

المباراة الفرعية الثانية

$$\begin{bmatrix} 6 & -12 \\ -8 & 14 \end{bmatrix} \begin{matrix} -12 \\ -8 \end{matrix} \rightarrow \text{maximin}$$

$$\text{minimax} \longrightarrow \begin{matrix} 6 & 14 \end{matrix}$$

المباراة الفرعية الثانية لا تحتوي على نقطة توازن وقيمتها محصورة بين:

$$-8 < v < 6$$

نحاول حل هذه المباراة الفرعية الثانية عن طريق الطريقة الحسابية

$$\begin{bmatrix} 6 & -12 \\ -8 & 14 \end{bmatrix} \begin{matrix} 11/20 \\ 9/20 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \frac{13}{20} & \frac{7}{20} \end{matrix}$$

$$v = \frac{-3}{10}$$

إن للمبارة الفرعية الثانية حلا بإستراتيجيات مختلطة يعطي قيمة للمباراة $v = \frac{-3}{10}$

المباراة الفرعية الثالثة

$$\begin{bmatrix} -2 & -12 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} \begin{matrix} -12 \\ -4 \end{matrix} \rightarrow \text{maximin}$$

$$\text{minimax} \longrightarrow \begin{matrix} -2 & 14 \end{matrix}$$

المباراة الفرعية الثالثة لا تحتوي على نقطة توازن وقيمتها محصورة بين:

$$-4 < v < -2$$

نحاول حل هذه المباراة الفرعية الثالثة عن طريق الطريقة الحسابية

$$\begin{bmatrix} -2 & -12 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} \begin{matrix} 9/14 \\ 5/14 \end{matrix}$$

$$\frac{13}{14} \quad \frac{1}{14}$$

$$v = \frac{-19}{7}$$

إن للمبارة الفرعية الثانية حلا بإستراتيجيات مختلطة يعطي قيمة للمباراة $v = \frac{-19}{7}$

بما أن المباراة الأصلية ينظر إليها من منظور لاعب العمود فإننا نأخذ قيمة المباراة الجزئية الأصغر كحل للمباراة و في هذه الحالة المباراة الفرعية الثالثة هي حل للمباراة الأصلية حيث يلعب لاعب الصف إستراتيجيته الأولى بنسبة $\frac{9}{14}$ من الوقت و إستراتيجيته الثانية بنسبة $\frac{5}{14}$ ، أما لاعب العمود فيلعب بإستراتيجيته الثالثة بنسبة $\frac{13}{14}$ من الوقت و إستراتيجيته الخامسة بنسبة $\frac{1}{14}$ من الوقت وأن لا يلعبوا بباقي الإستراتيجيات الموجودة في المصفوفة الأصلية لنتحصل على قيمة للمباراة قدرها $\frac{-19}{7}$ التي تعتبر ربح لصالح لاعب العمود و خسارة للاعب الصف

المباريات من الحجم 2×m

في هذه الحالة يمتلك لاعب العمود إستراتيجيتين فقط أما لاعب الصف يمتلك أكثر من إستراتيجيتين لهذا نقسم المباراة الأصلية إلى مباريات فرعية من الحجم 2×2 ثم نقوم بحلها بأحد طرق السابقة الحسابية أو الجبرية ثم نختار أكبر قيمة من بين قيم المباريات الفرعية لتكون حلا للمباراة بإعتبار أنها تحل من وجهة نظر لاعب الصف. لتوضيح ما سبق نأخذ التطبيق (1-1) التالي:

$$\begin{bmatrix} -8 & -3 \\ 6 & -4 \\ -10 & -7 \\ 2 & 8 \\ -5 & -9 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

أولا: نفحص المباراة ما إن كانت تحتوي على نقطة توازن أم لا

$$\begin{bmatrix} -8 & -3 \\ 6 & -4 \\ -10 & -7 \\ 2 & 8 \\ -5 & -9 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} -8 \\ -4 \\ -10 \\ 2 \\ -9 \\ 4 \end{matrix} \longrightarrow \text{maximin}$$

$$\begin{matrix} 6 & 8 \end{matrix}$$
$$\uparrow$$

نلاحظ أن المباراة لا تحتوي على نقة minimax ـا محصورة بين:

$$4 < v < 6$$

ثانيا: نحاول إختزال المصفوفة إلى أكبر قدر ممكن

نلاحظ أن قيم السطر رقم (4) أكبر تمام من قيم الأسطر (1)،(3)،(5) و بالتالي هذه الأسطر مسيطر عليها و يجب حذفها من مصفوفة الدفع فتصبح بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

بما أن مصفوفة الدفع أصبحت غير قابلة للإختزال نحاول تجزئتها إلى ثلاث مباريات فرعية من الحجم 2×2 كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

ثالثا: نقوم بحل هذه المباريات الفرعية بالطريقة الحسابية

المباراة الفرعية الأولى

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} -4 \\ 2 \end{matrix} \rightarrow \text{maximin}$$

$$\text{minimax} \longrightarrow \begin{matrix} 6 & 8 \end{matrix}$$

المباراة الفرعية الأولى لا تحتوي على نقطة توازن وقيمتها محصورة بين:

$$2 < v < 6$$

نحاول حل هذه المباراة الفرعية الأولى عن طريق الطريقة الحسابية

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3/8 \\ 5/8 \end{matrix}$$

$$\frac{3}{4} \quad \frac{1}{4}$$

إن للمبارة الفرعية الأولى حلا بإستراتيجيات مختلطة يعطي قيمة للمباراة $v = \frac{7}{2}$

المباراة الفرعية الثانية

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} -4 \\ 4 \end{matrix} \rightarrow \text{maximin}$$

$$\text{minimax} \longrightarrow 6 \quad 6$$

المباراة الفرعية الثانية لا تحتوي على نقطة توازن وقيمتها محصورة بين:

$$4 < v < 6$$

نحاول حل هذه المباراة الفرعية الثانية عن طريق الطريقة الحسابية

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1/6 \\ 5/6 \end{matrix}$$

$$\frac{5}{6} \quad \frac{1}{6}$$

$$v = \frac{13}{3}$$

إن للمبارة الفرعية الثانية حلا بإستراتيجيات مختلطة يعطي قيمة للمباراة $v = \frac{13}{3}$

المباراة الفرعية الثالثة

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 4^* \end{matrix}$$

$$4^* \quad 8$$

المباراة الفرعية الثالثة تحتوي على نقطة توازن حيث قيمة المباراة $v = 4$

بما أن المباراة الأصلية ينظر إليها من منظور لاعب الصف فإننا نأخذ قيمة المباراة الجزئية الأكبر كحل للمباراة و في هذه الحالة المباراة الفرعية الثانية هي حل للمباراة الأصلية حيث يلعب لاعب الصف إستراتيجيته الثانية بنسبة $\frac{1}{6}$ من الوقت و إستراتيجيته السادسة بنسبة $\frac{5}{6}$ ، أما لاعب العمود فيلعب بإستراتيجيته الأولى بنسبة $\frac{5}{6}$ من الوقت و إستراتيجيته الثانية بنسبة $\frac{1}{6}$ من الوقت وأن لا يلعبوا بباقي الإستراتيجيات الموجودة في المصفوفة الأصلية لنتحصل على قيمة للمباراة قدرها $\frac{13}{3}$ التي تعتبر ربح لصالح لاعب الصف و خسارة للاعب العمود.

XI.2.2.الحل البياني للمباريات من الحجم $2\times m$ و $n\times 2$

تستخدم هذه الطريقة في حالة كون أحد اللاعبين يمتلك إستراتيجيتين فقط، حيث يتم إستخدام الرسم البياني لتحديد قيمة المباراة ، مع العلم أن نحدد نتيجة المباراة من وجهة نظر اللاعب الذي يمتلك إستراتيجيتين فقط .

يتم الرسم على ثلاثة محاول إثنان أفقيان تتحد فيهم قيم **v** تكون نسبة اللعب بإستراتيجية معينة إما صفر أو واحد و محور عمودي يتم فيه تحديد نسبة الوقت الذي يلعب به اللاعب إستراتيجياته.

لنفرض أن هناك مباراة معينة تتم بين طرفين A و B أن المباراة لا تحتوي على نقطة توازن و غير قابلة للإختزال، ونفرض أيضا أن اللاعب A يمتلك إستراتيجيتين فقط A_2, A_1 أما اللاعب B يمتلك مجموعة من الإستراتيجيات $B_1, B_2, \dots, B_n$ بحيث مصفوفة الدفع بالشكل التالي:

		اللاعب B			
		B_1	B_2	...	B_n
اللاعب A	A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
	A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}

من خلال مصفوفة الدفع يمكن تحديد الربح المتوقع للاعب A كما هو موضح بالشكل التالي:

إستراتيجيات اللاعب **B**	الربح المتوقع للاعب **A**
B_1	$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = (a_{11} + a_{21})p_1 + a_{21}$
B_2	$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = (a_{12} + a_{22})p_1 + a_{22}$
.	.....
.	.....
.	.....
B_n	$a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 = (a_{1n} + a_{2n})p_1 + a_{2n}$

أما إذا كان اللاعب يمتلك إستراتيجيتين فقط تصبح مصفوفة الدفع كما يلي:

		اللاعب B	
		B_1	B_2
اللاعب A	A_1	a_{11}	a_{12}
	A_2	a_{21}	a_{22}
	...	...	...
	...	...	...
	A_m	a_{m1}	a_{m2}

أما الربح المتوقع للاعب موضح في الجدول التالي:

إستراتيجيات اللاعب **A**	الربح المتوقع للاعب **B**
A_1	$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = (a_{11} + a_{12})q_1 + a_{12}$
A_2	$a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = (a_{21} + a_{22})q_1 + a_{22}$
.	.....
.	.....
.	.....
A_m	$a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 = (a_{m1} + a_{m2})q_1 + a_{m2}$

تطبيق 1

لتكن لديك مصفوفة الدفع التايلية و المطلوب حل المباراة بإستخدام الطريقة البيانية

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل

نلاحظ أن المباراة غير قابلة للإختزال نبحث عن نقطة الإستقرار

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 8 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \rightarrow \text{maximin}$$

$$\begin{matrix} 8 & 5 & 10 \\ & \uparrow & \end{matrix}$$

minimax

نظرا لعدم وجود نقطة الاستقرار No Saddle point فإن قيمة قيمة المباراة تعطى بالشكل:

$$2 < v < 5$$

لدينا اللاعب الأول يملك إستراتيجيتين فقط أما اللاعب الثاني يملك ثلاثة إستراتيجيات و بالتالي نلجأ إلى الحل البياني للمبارة من وجهة نظر اللاعب الأول

نفرض أن الوقت الذي يلعب به اللاعب A إستراتيجيته الأولى (الصف الأول) هو p_1

نفرض أن الوقت الذي يلعب به اللاعب A إستراتيجيته الثانية (الصف الثاني) هو p_2

حيث $p_1 + p_2 = 1$

بما أن اللاعب الثاني يملك ثلاثة إستراتيجيات فإن :

q_1 : تمثل الوقت الذي يلعب به اللاعب B إستراتيجيته الأولى (العمود الأول)

q_2 : تمثل الوقت الذي يلعب به اللاعب B إستراتيجيته الثانية (العمود الثاني)

q_3 : تمثل الوقت الذي يلعب به اللاعب B إستراتيجيته الثالثة (العمود الثالث)

حيث $q_1 + q_2 + q_3 = 1$

نفرض أن v تمثل نتيجة المباراة بالنسبة للاعبين لذلك فإن اللاعب الأول يحاول أن يجعل قيمة v أكبر ما يمكن [تعظيم v] فإن وقع اختيار اللاعب B على الاستراتيجية الأولى [العمود الأول] فإن نتيجة ذلك الإختيار بالنسبة للاعب A سيكون:

$$p_1 + 8p_2 \rightarrow p_1 + 8(1 - p_1) \rightarrow 8 - 7p_1$$

أما إذا وقع الإختيار B على استراتيجية الثانية (العمود 2) فإن نتيجة الاختيار للاعب A هي :

$$3p_1 + 5p_2 \rightarrow 3p_1 + 5(1 - p_1) \rightarrow 5 - 2p_1$$

أما إذا وقع الإختيار B على استراتيجية الثالثة (العمود 3) فإن نتيجة الاختيار للاعب A هي :

$$10p_1 + 2p_2 \rightarrow 10p_1 + 2(1 - p_1) \rightarrow 2 + 8p_1$$

نرتب النتائج في جدول :

إستراتيجيات اللاعب B	الربح المتوقع للاعب A
1	$8 - 7p_1$
2	$5 - 2p_1$
3	$2 + 8p_1$

لحساب نتيجة المبارة وفق الطريقة البيانية نقوم بالخطوات التالية:

1. نرسم إحداثيين لتمثيل الاحتمال p_1 على المحور الأفقي و نتيجة المنافسة v على المحور العمودي
2. نقسم المحور الأفقي إلى عدة أجزاء محصورة بين صفر و واحد و طول كل جزء يساوي $1/10$

و سبب حصر قيمة التقسيم بين الصفر و واحد يرجع إلى أن p_1 عبارة عن احتمال و أن قيمة الاحتمال محصورة بين صفر واحد $0 \leq p_1 \leq 1$.

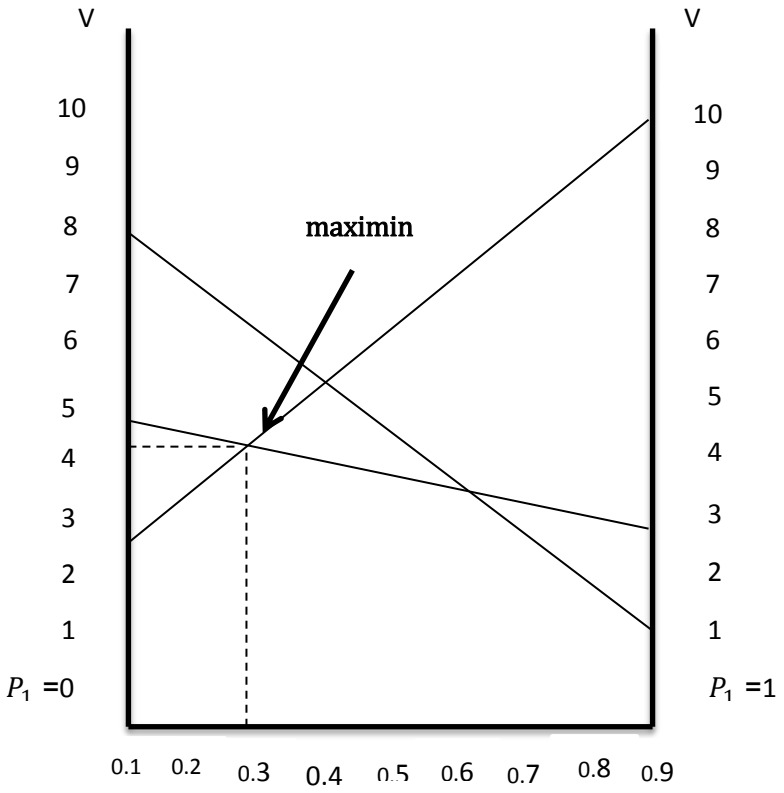
3. نحد قيمة v عندما يساوي p_1 الصفر و الواحد لكل مستقيم يمثل العائد المتوقع للاعب A عند لعب اللاعب B إستراتيجية معينة كما يلي:

المستقيم رقم 1	
$8 - 7p_1$	
p_1	v
0	8
1	1

المستقيم رقم 2	
$5-2p_1$	
p_1	v
0	5
1	3

المستقيم رقم 3	
$2+8p_1$	
p_1	v
0	2
1	10

4. نرسم هذه المعادلات



من خلال الشكل نلاحظ أن قيمة المباراة تتحدد بتقاطع المستقيم رقم 2 مع المستقيم رقم 3

$$5 - 2p_1 = 2 + 8p_1 \rightarrow p_1 = \frac{3}{10}, p_2 = \frac{7}{10}, v = \frac{22}{5}$$

و بما أن اللاعب A يلعب فقط بالمستقيم الأول و الثاني فإن $q_1 = 0$ و بذلك فإن اللاعب B سوف يلعب إستراتيجيته الثانية و الثالثة فقط و تعطى حلول اللاعب B كما يلي:

$$3q_2 + 10(1 - q_3) = 5q_2 + 2(1 - q_3)$$

$$10 - 7q_2 = 3q_2 + 2 \rightarrow q_1 = 0, q_2 = \frac{4}{5}, q_3 = \frac{1}{5}, v = \frac{22}{5}$$

تطبيق 2

جد حلا لمصفوفة الدفع Pay off Martix ذات البعد (3×2) المبينة في الجدول التالي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 5 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل

نلاحظ أن المباراة غير قابلة للإختزال نبحث عن نقطة الإستقرار

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 5 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \rightarrow \text{maximin}$$

$$\begin{matrix} 10 & 8 \end{matrix}$$

$$\uparrow$$

minimax

نظرا لعدم وجود نقطة الاستقرار No Saddle point فإن قيمة قيمة المباراة تعطى بالشكل:

$$3 < v < 8$$

لدينا اللاعب الأول يملك ثلاثة إستراتيجيات أما اللاعب الثاني يملك إستراتيجيتين فقط و بالتالي نلجأ إلى الحل البياني للمبارة من وجهة نظر اللاعب الثاني B

نفرض أن الوقت الذي يلعب به اللاعب A إستراتيجيته الأولى (الصف الأول) هو p_1

نفرض أن الوقت الذي يلعب به اللاعب A إستراتيجيته الثانية (الصف الثاني) هو p_2

نفرض أن الوقت الذي يلعب به اللاعب A إستراتيجيته الثالثة (الصف الثالث) هو p_3

حيث $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

بما أن اللاعب الثاني يملك إستراتيجيتين فقط فإن :

q_1 : تمثل الوقت الذي يلعب به اللاعب B إستراتيجيته الأولى (العمود الأول)

q_2 : تمثل الوقت الذي يلعب به اللاعب B إستراتيجيته الأولى (العمود الثاني)

حيث $q_1 + q_2 = 1$

نفرض أن v تمثل نتيجة المباراة بالنسبة للاعبين لذلك فإن اللاعب B يحاول أن يجعل قيمة v أقل ما يمكن [تدنية v] فإن وقع اختيار اللاعب A على الاستراتيجية الأولى [الصف الأول] فإن نتيجة ذلك الإختيار بالنسبة للاعب B سيكون:

$$q_1 + 8q_2 \rightarrow q_1 + 8(1 - q_1) \rightarrow 8 - 7q_1$$

أما إذا وقع الإختيار A على استراتيجية الثانية (الصف 2) فإن نتيجة الاختيار للاعب B هي :

$$3q_1 + 5q_2 \rightarrow 3q_1 + 5(1 - q_1) \rightarrow 5 - 2q_1$$

أما إذا وقع الإختيار A على استراتيجية الثالثة (الصف 3) فإن نتيجة الاختيار للاعب B هي :

$$10q_1 + 2q_2 \rightarrow 10q_1 + 2(1 - q_1) \rightarrow 2 + 8q_1$$

نرتب النتائج في جدول :

إستراتيجيات اللاعب A	الربح المتوقع للاعب B
1	$8 - 7q_1$
2	$5 - 2q_1$
3	$2 + 8q_1$

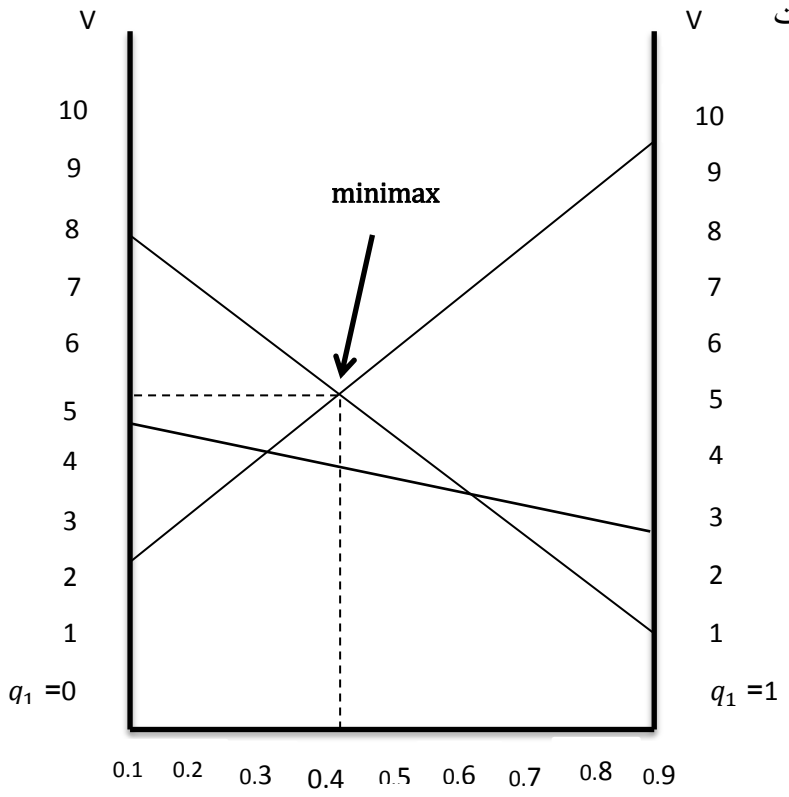
نجد قيمة v عندما يساوي q_1 الصفر و الواحد لكل مستقيم يمثل العائد المتوقع للاعب B عند لعب اللاعب A إستراتيجية معينة كما يلي:

المستقيم رقم 1	
$8 - 7q_1$	
q_1	v
0	8
1	1

المستقيم رقم 2	
$5-2q_1$	
q_1	v
0	5
1	3

المستقيم رقم 3	
$2+8q_1$	
q_1	v
0	2
1	10

نرسم هذه المعادلات



من خلال الشكل نلاحظ أن قيمة المباراة تتحدد بتقاطع المستقيم رقم 1 مع المستقيم رقم 3

$$8-7q_1 = 2+8q_1 \rightarrow q_1 = \frac{2}{5}, q_2 = \frac{3}{5}, v = \frac{26}{5}$$

و بما أن اللاعب B يلعب فقط بالمستقيم الأول و الثالث فإن $p_2 = 0$ و بذلك فإن اللاعب A سوف يلعب إستراتيجيته الأولى و الثالثة فقط و تعطى حلول اللاعب A كما يلي:

$$p_1 + 10(1 - p_1) = 8q_1 + 2(1 - p_1)$$

$$10 - 9p_1 = 6p_1 + 2 \rightarrow p_1 = \frac{8}{15}, p_2 = 0, p_3 = \frac{7}{15}, v = \frac{26}{5}$$

XI.3.حلول المباريات من الحجم 3×3 فما فوق

نلجأ إلى أسلوب البرمجة الخطية في حل المباريات عندما يتعذر علينا إختصار مصفوفة الدفع إلى الحجم 2×2 أو 2×m أو n×2 و على إفتراض عدم وجود نقطة توازن للمباراة .

لتوضيح عملية تحويل المباراة إلى مسألة برمجة خطية (L.P) نفترض مصفوفة الدفع الآتية و التي تمثل مباراة من الحجم (m×n) حيث: $m, n \geq 3$.

		اللاعب 2			
		B_1	B_2	...	B_n
اللاعب 1	A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
	A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...
	A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

نفرض أن p_i تمثل نسب الزمن الذي يلعب به اللاعب1 إستراتيجيات حيث: $i = 1, \dots, m$ و

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \quad , p_i \geq 0$$

القيمة المتوقعة للاعب1 عندما يلعب اللاعب2 إستراتيجيته الأولى (العمود الأول) هي :

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m1}p_m$$

القيمة المتوقعة للاعب1 عندما يلعب اللاعب2 إستراتيجيته الثانية (العمود الثاني) هي :

$$a_{12}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m2}p_m$$

.....

القيمة المتوقعة للاعب1 عندما يلعب اللاعب2 إستراتيجيته n (العمود n) هي :

$$a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{mn}p_m$$

إن اللاعب1 يهدف إلى إيجاد قيم p_i التي تعظم أقل عائد متوقع ممكن (v) و للتعبير عن هذا الهدف نكتب المعادلات السابقة بالصيغة الآتية:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m1}p_m \geq v \\ a_{12}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m2}p_m \geq v \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{mn}p_m \geq v \\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \quad , p_i \geq 0 \end{cases}$$

و بما أن اللاعب1 يهدف إلى تعظيم أقل عائد متوقع (v) فإن دالة الهدف تكتب بالصيغة التالية:

$$Max\ v$$

لتبسيط مسألة البرمجة الخطية السابقة يتم قسمة القيود السابقة على (v) ووضع $\bar{p}_i = \frac{p_i}{v}$ تصبح القيود بالشكل التالي:

$$S.T \begin{cases} a_{11}\bar{p}_1 + a_{21}\bar{p}_2 + \cdots + a_{m1}\bar{p}_m \geq 1 \\ a_{12}\bar{p}_1 + a_{21}\bar{p}_2 + \cdots + a_{m2}\bar{p}_m \geq 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{1n}\bar{p}_1 + a_{2n}\bar{p}_2 + \cdots + a_{mn}\bar{p}_m \geq 1 \\ \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \cdots + \bar{p}_m = \frac{1}{v} \\ \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_m \geq 0 \end{cases}$$

بما أن $Max\ v = Min\frac{1}{v}$ و على إفتراض أن $z = \frac{1}{v}$ فإن الصيغة النهائية للبرنامج الخطي للاعب1 هي:

$$Min\ z = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \cdots + \bar{p}_m$$

$$\begin{cases} a_{11}\bar{p}_1 + a_{21}\bar{p}_2 + \cdots + a_{m1}\bar{p}_m \geq 1 \\ a_{12}\bar{p}_1 + a_{21}\bar{p}_2 + \cdots + a_{m2}\bar{p}_m \geq 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{1n}\bar{p}_1 + a_{2n}\bar{p}_2 + \cdots + a_{mn}\bar{p}_m \geq 1 \\ \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_m \geq 0 \end{cases}$$

بنفس الأسلوب يمكن تكوين البرنامج الخطي للاعب2 الذي يمثل البرنامج الثنائي المقابل للبرنامج الخطي للاعب1 أي:

$$Max\, w = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \cdots + \bar{q}_n$$

$$S.T \begin{cases} a_{11}\bar{q}_1 + a_{12}\bar{q}_2 + \cdots + a_{1n}\bar{q}_n \leq 1 \\ a_{21}\bar{q}_1 + a_{22}\bar{q}_2 + \cdots + a_{2n}\bar{q}_n \leq 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\bar{q}_1 + a_{m2}\bar{q}_2 + \cdots + a_{mn}\bar{q}_n \leq 1 \\ \bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_n \geq 0 \end{cases}$$

ملاحظة 1

- يستحسن حل البرنامج الثنائي لأنه لا يحتوي على متغيرات إصطناعية.
- يتم إرجاع قيمة دالة الهدف و قيم p_i و q_i إلى قيمهم الأصلية بعد الإنتهاء من حل البرنامج الخطي.
- يمكن إستخراج حلول البرنامج الأصلي من الجدول النهائي للسمبلكس حيث تمثل معاملات متغيرات الفجوة في هذا الجدول.

تطبيق 1

أوجد الإستراتيجيات المثلى و قيمة المباراة لمصفوفة الدفع التالية:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

أولا: نفحص المباراة ما إن كانت تحتوي على نقطة توازن أم ما

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \rightarrow \text{maximin}$$

$$\text{minimax} \longrightarrow 4 \quad 7 \quad 6$$

المباراة لا تحتوي على نقطة توازن و قيمتها محصورة بين:

$$3 \leq v \leq 4$$

كما نلاحظ أن المصفوفة غير قابلة للإختزال و بما أن مصفوفة الدفع من الحجم 3×3 نلجأ إلى البرمجة الخطية لحل هذه المباراة .

لتسهيل حل هذه المباراة نقوم بتكوين البرنامج الخطي ونستنتج حلول البرنامج الصلي من الجدول النهائي لطريقة السمبلكس.

نفرض أن q_1 نسبة الزمن الذي يلعب به لاعب العمود إستراتيجيته الأولى (العمود الأول).

نفرض أن q_2 نسبة الزمن الذي يلعب به لاعب العمود إستراتيجيته الثانية (العمود االثاني).

نفرض أن q_3 نسبة الزمن الذي يلعب به لاعب العمود إستراتيجيته الثالثة (العمود الثالث).

يمكن صياغة البرنامج الخطي للاعب2 على النحو التالي:

$$Max\ w = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3$$

$$S.T \begin{cases} 4\bar{q}_1 + 3\bar{q}_2 + \bar{q}_3 \leq 1 \\ 2\bar{q}_1 + 4\bar{q}_2 + 6\bar{q}_3 \leq 1 \\ 3\bar{q}_1 + 7\bar{q}_2 + 5\bar{q}_3 \leq 1 \\ \bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3 \geq 0 \end{cases}$$

كتابة البرنامج الخطي السابق على الشكل المعياري

$$Max\ w = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$S.T \begin{cases} 4\bar{q}_1 + 3\bar{q}_2 + \bar{q}_3 - S_1 = 1 \\ 2\bar{q}_1 + 4\bar{q}_2 + 6\bar{q}_3 - S_2 = 1 \\ 3\bar{q}_1 + 7\bar{q}_2 + 5\bar{q}_3 - S_3 = 1 \\ \bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases}$$

بعد الإنتهاء من صياغة البرنامج القياسي نقوم بتشكيل جدول الحل المبدئي للبرنامج ونقوم بحله بطريقة السمبلكس مع ضرورة ضرب قيم المتغيرات في دالة الهدف في العدد (-1) لكي نتحصل على قيمة (w) موجبة.

ملاحظة 2

إن معاملات المتغيرات في جدول الحل المبدئي تساوي (-1) لهذا نختار أحد المتغيرات لا على التعين للدخول في الحل، وفي هذا الجدول نختار $\bar{q}_1$ ليدخل مكان S_1.

	جدول الحل المبدئي						
$V.B$	$\bar{q}_1$	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_3$	S_1	S_2	S_3	B
S_1	4	3	1	1	0	0	1
S_2	2	4	6	0	1	0	1
S_3	3	7	5	0	0	1	1
c_j	-1	-1	-1	0	0	0	0

	الجدول الثاني						
$V.B$	$\bar{q}_1$	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_3$	S_1	S_2	S_3	B
$\bar{q}_1$	1	$^3/_4$	$^1/_4$	$^1/_4$	0	0	$^1/_4$
S_2	0	$^5/_2$	$^{11}/_{12}$	$^{-1}/_2$	1	0	$^1/_2$
S_3	0	$^{19}/_4$	$^{17}/_4$	$^{-3}/_4$	0	1	$^1/_4$
c_j	0	$^{-1}/_4$	$^{-3}/_4$	$^1/_4$	0	0	$^1/_4$

يخرج S_3 من الحل و يدخل $\bar{q}_3$ إلى الحل.

	الجدول الثالث						
$V.B$	$\bar{q}_1$	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_3$	S_1	S_2	S_3	B
$\bar{q}_1$	1	$^8/_{17}$	0	$^5/_{17}$	0	$^{-1}/_{17}$	$^4/_{17}$
S_2	0	$^{301}/_{204}$	0	$^{-23}/_{68}$	1	$^{-11}/_{51}$	$^{91}/_{204}$
$\bar{q}_3$	0	$^{19}/_{17}$	1	$^{-3}/_{17}$	0	$^4/_{17}$	$^1/_{17}$
c_j	0	$^{10}/_{17}$	0	$^2/_{17}$	0	$^3/_{17}$	$^5/_{17}$

$\bar{p}_1 \quad \bar{p}_2 \quad \bar{p}_3$

حلول البرنامج الأصلي

بما أن المتغيرات الأساسية لدالة الهدف أصبحت كلها أكبر أو تساوي صفر نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل و الجدول الثالث هو الجدول النهائي.

من خلال الجدول نلاحظ أن حلول البرنامج الثنائي هي:

$$w = \frac{5}{17}\ , \bar{q}_1 = \frac{4}{17}, \bar{q}_2 = 0, \bar{q}_3 = \frac{1}{17}$$

نستنتج حلول البرنامج الأصلي من جدول السمبلكس النهائي و هي:

$$z = \frac{5}{17}\ , \bar{p}_1 = \frac{2}{17}, \bar{p}_2 = 0, \bar{p}_3 = \frac{3}{17}$$

بما أننا فرضنا من البداية أن :

$$z = w = \frac{1}{v}$$

و

$$\bar{q}_i = \frac{q_i}{v} \quad , \bar{p}_i = \frac{p_i}{v}$$

نقوم بحساب كل من p_i, v, q_i

$$\frac{1}{v} = \frac{5}{17} \rightarrow v = \frac{17}{5}$$

$$\bar{q}_i = \frac{q_i}{v} \rightarrow q_i = v \times \bar{q}_i$$

$$q_1 = \frac{17}{5} \times \frac{4}{17} = \frac{4}{5} \quad , q_2 = \frac{17}{5} \times 0 = 0 \quad , q_3 = \frac{17}{5} \times \frac{1}{17} = \frac{1}{5}$$

$$\bar{p}_i = \frac{p_i}{v} \rightarrow p_i = v \times \bar{p}_i$$

$$p_1 = \frac{17}{5} \times \frac{2}{17} = \frac{2}{5} \quad , p_2 = \frac{17}{5} \times 0 = 0 \quad , p_3 = \frac{17}{5} \times \frac{3}{17} = \frac{3}{5}$$

من خلال ماسبق يتبين لنا أن اللاعب1 يلعب بإستراتيجيته الأولى $\frac{2}{5}$ من الوقت ، و يلعب إستراتيجيته الثالثة $\frac{3}{5}$ من الوقت و أن لا يلعب بالاستراتيجية الثانية ،أما اللاعب2 فيلعب إستراتيجيته الأولى $\frac{4}{5}$ من الوقت و الإستراتيجية الثالثة $\frac{1}{5}$ من الوقت و أن لا يلعب بالاستراتيجية الثانية ، لتكون قيمة المباراة$\frac{17}{5}$ لصالح اللاعب1.

ملاحظة3

في بعض الأحيان تكون أغلب قيم مصفوفة الدفع سالبة و يتعذر حلها بطريقة السمبلكس و للتغلب عن هذه المشكلة هناك حلان:

- ✓ إضافة عدد ثابت يكون أبر أو يساوي أقل قيمة سالبة(أكبر قيمة بالقمة المطلقة) في مصفوفة الدفع و بالتالي تصبح قيمة المباراة الأصلية هي عبارة عن قيمة المباراة الجديدة مطروحا منها قيمة الثابث.
- ✓ تغيير إشارات مصفوفة الدفع بحيث العدد السالب يصبح موجب و العدد الموجب يصبح سالب ثم نقوم بحساب منقول مصفوفة الدفع أي لاعب الصف يصبح لاعب عمود و لاعب العمود يصبح لاعب الصف من خلال تحويل الأسطر إلى أعمدة أو الأعمدة إلى أسطر.

تطبيق 2

أوجد الإستراتيجيات المثلى و قيمة المباراة لمصفوفة الدفع التالية:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & -3 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن هذه المباراة لا تحتوي على نقطة توازن و لا هي قابلة للإختزال لهذا نلجأ إلى البرمجة الخطية ، لكن هناك عدة قيم سالبة تمنعنا من إستخدام هذا الأسلوب لحل هه المباراة لهذا نستخدم أحد الطريقتين

إضافة عنصر ثابت لجميع عناصر مصفوفة الدفع

من خلال ملاحظة مصفوفة الدفع نلاحظ أن أقل قيمة هي -4 و بالتالي نضيف 4 لجميع عناصر المصفوفة فنتصبح كالتالي:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

نستخرج البرنامج الخطي الثنائي(الخاص بلاعب العمود) كالتالي:

$$Max\ w = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3$$

$$S.T \begin{cases} 2\bar{q}_1 + 5\bar{q}_2 + \bar{q}_3 \leq 1 \\ 5\bar{q}_1 + \bar{q}_3 \leq 1 \\ 2\bar{q}_1 + 3\bar{q}_2 + 7\bar{q}_3 \leq 1 \\ \bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3 \geq 0 \end{cases}$$

كتابة البرنامج الخطي السابق على الشكل المعياري

$$Max\ w = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$S.T \begin{cases} 2\bar{q}_1 + 5\bar{q}_2 + \bar{q}_3 - S_1 = 1 \\ 5\bar{q}_1 + \bar{q}_3 - S_2 = 1 \\ 2\bar{q}_1 + 3\bar{q}_2 + 7\bar{q}_3 - S_3 = 1 \\ \bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases}$$

	جدول الحل المبدئي						
$V.B$	$\bar{q}_1$	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_3$	S_1	S_2	S_3	B
S_1	2	5	1	1	0	0	1
S_2	5	0	1	0	1	0	1
S_3	2	3	7	0	0	1	1
c_j	-1	-1	-1	0	0	0	0

يخرج S_2 من الحل و يدخل $\bar{q}_1$ إلى الحل.

	الجدول الثاني						
$V.B$	$\bar{q}_1$	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_3$	S_1	S_2	S_3	B
S_1	0	5	$^3/_5$	1	$^{-2}/_5$	0	$^3/_5$
$\bar{q}_1$	1	0	$^1/_5$	0	$^1/_5$	0	$^1/_5$
S_3	0	3	$^{33}/_5$	0	$^{-2}/_5$	1	$^3/_5$
c_j	0	-1	$^{-4}/_5$	0	$^1/_5$	0	$^1/_5$

يخرج S_1 من الحل و يدخل $\bar{q}_2$ إلى الحل.

	الجدول الثالث						
$V.B$	$\bar{q}_1$	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_3$	S_1	S_2	S_3	B
$\bar{q}_2$	0	1	$^3/_{25}$	$^1/_5$	$^{-2}/_{25}$	0	$^3/_{25}$
$\bar{q}_1$	1	0	$^1/_5$	0	$^1/_5$	0	$^1/_5$
S_3	0	0	$^{156}/_{25}$	$^{-3}/_5$	$^{-4}/_{25}$	1	$^6/_{25}$
c_j	0	0	$^{-17}/_{25}$	$^1/_5$	$^3/_{25}$	0	$^8/_{25}$

يخرج S_3 من الحل و يدخل $\bar{q}_3$ إلى الحل.

	الجدول الرابع						
$V.B$	$\bar{q}_1$	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_3$	S_1	S_2	S_3	B
$\bar{q}_2$	0	1	0	$^{11}/_{52}$	$^{-1}/_{13}$	$^{-1}/_{52}$	$^{3}/_{26}$
$\bar{q}_1$	1	0	0	$^{3}/_{156}$	$^{8}/_{39}$	$^{-5}/_{156}$	$^{5}/_{26}$
$\bar{q}_3$	0	0	1	$^{-5}/_{52}$	$^{-1}/_{39}$	$^{25}/_{156}$	$^{1}/_{26}$
c_j	0	0	0	$^{7}/_{52}$	$^{4}/_{39}$	$^{17}/_{156}$	$^{9}/_{26}$

$\bar{p}_1 \quad \bar{p}_2 \quad \bar{p}_3$

حلول البرنامج الأصلي

بما أن المتغيرات الأساسية لدالة الهدف أصبحت كلها أكبر أو تساوي صفر نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل و الجدول الثالث هو الجدول النهائي.

من خلال الجدول نلاحظ أن حلول البرنامج الثنائي هي:

$$w = \frac{9}{26}\ , \bar{q}_1 = \frac{5}{26}, \bar{q}_2 = \frac{3}{26}, \bar{q}_3 = \frac{1}{26}$$

نستنتج حلول البرنامج الأصلي من جدول السمبلكس النهائي و هي:

$$z = \frac{9}{26}\ , \bar{p}_1 = \frac{7}{52}, \bar{p}_2 = \frac{4}{39}, \bar{p}_3 = \frac{17}{156}$$

بما أننا فرضنا من البداية أن :

$$z = w = \frac{1}{v}$$

و

$$\bar{q}_i = \frac{q_i}{v}\ \ , \bar{p}_i = \frac{p_i}{v}$$

نقوم بحساب كل من p_i, v, q_i

$$\frac{1}{v} = \frac{9}{26} \rightarrow v = \frac{26}{9}$$

$$\bar{q}_i = \frac{q_i}{v} \rightarrow q_i = v \times \bar{q}_i$$

$$q_1 = \frac{26}{9} \times \frac{5}{26} = \frac{5}{9} \quad , q_2 = \frac{26}{9} \times \frac{3}{26} = \frac{3}{9} \quad , q_3 = \frac{26}{9} \times \frac{1}{26} = \frac{1}{9}$$

$$\bar{p_i} = \frac{p_i}{v} \rightarrow p_i = v \times \bar{p_i}$$

$$p_1 = \frac{26}{9} \times \frac{7}{52} = \frac{7}{18} \quad , p_2 = \frac{26}{9} \times \frac{4}{39} = \frac{8}{27} \quad , p_3 = \frac{26}{9} \times \frac{17}{156} = \frac{17}{54}$$

بما أننا أضفنا قيمة ثابتة قدرها 4 لمصفوفة الدفع نقوم بطرحها من قيمة المباراة

$$v = \frac{26}{9} - 4 = -\frac{10}{9}$$

من خلال ماسبق يتبين لنا أن اللاعب1 يلعب بإستراتيجيته الأولى $\frac{7}{18}$ من الوقت ، و يلعب إستراتيجيته الثانية $\frac{8}{27}$ من الوقت و إستراتيجيته الثالثة $\frac{17}{54}$ من الوقت،أما اللاعب2 فيلعب إستراتيجيته الأولى $\frac{5}{9}$ من الوقت و الإستراتيجية الثالثة $\frac{3}{9}$ من الوقت و إستراتيجيته الثالثة $\frac{1}{9}$ من الوقت ، لتكون قيمة المباراة$\frac{10}{9}-$ لصالح اللاعب2.

الطريقة الثاية هي تغير إشارات مصفوفة الدفع و من ثم جعل لاعب الصف هو لاعب العمود و ذلك بتحويل الأسطر إلى أعمدة فتصبح مصفوفة الدفع كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

نستخرج البرنامج الخطي الثنائي(الخاص بلاعب العمود الذي هو في الحقيقة لاعب الصف) كالتالي:

$$Max\ w = \bar{p_1} + \bar{p_2} + \bar{p_3}$$

$$S.T \begin{cases} 2\bar{p_1} - \bar{p_2} + 2\bar{p_3} \leq 1 \\ -\bar{p_1} + 4\bar{p_2} + \bar{p_3} \leq 1 \\ 3\bar{p_1} + 3\bar{p_2} - 3\bar{p_3} \leq 1 \\ \bar{p_1}, \bar{p_2}, \bar{p_3} \geq 0 \end{cases}$$

كتابة البرنامج الخطي السابق على الشكل المعياري

$$Max\ w = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$
$$S.T \begin{cases} 2\bar{p}_1 - \bar{p}_2 + 2\bar{p}_3 - S_1 = 1 \\ -\bar{p}_1 + 4\bar{p}_2 + \bar{p}_3 - S_2 = 1 \\ 3\bar{p}_1 + 3\bar{p}_2 - 3\bar{p}_3 - S_3 = 1 \\ \bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases}$$

	جدول الحل المبدئي						
$V.B$	$\bar{p}_1$	$\bar{p}_2$	$\bar{p}_3$	S_1	S_2	S_3	B
S_1	2	−1	2	1	0	0	1
S_2	−1	4	1	0	1	0	1
S_3	3	3	−3	0	0	1	1
c_j	−1	−1	−1	0	0	0	0

يخرج S_3 من الحل و يدخل $\bar{p}_1$ إلى الحل.

	الجدول الثاني						
$V.B$	$\bar{p}_1$	$\bar{p}_2$	$\bar{p}_3$	S_1	S_2	S_3	B
S_1	0	−3	4	1	0	$-2/3$	$1/3$
S_2	0	5	0	0	1	$1/3$	$4/3$
$\bar{p}_1$	1	1	−1	0	0	$1/3$	$1/3$
c_j	0	0	−2	0	0	$1/3$	$1/3$

يخرج S_1 من الحل و يدخل $\bar{p}_3$ إلى الحل.

	الجدول الثالث						
$V.B$	$\bar{p}_1$	$\bar{p}_2$	$\bar{p}_3$	S_1	S_2	S_3	B
$\bar{p}_3$	0	$-3/4$	1	$1/4$	0	$-1/6$	$1/12$
S_2	0	5	0	0	1	$1/3$	$4/3$
$\bar{p}_1$	1	$1/4$	0	$1/4$	0	$1/6$	$5/12$
c_j	0	$-3/2$	0	$1/2$	0	0	$1/2$

يخرج S_2 من الحل و يدخل $\bar{p}_2$ إلى الحل.

	الجدول الرابع						
$V.B$	$\bar{p}_1$	$\bar{p}_2$	$\bar{p}_3$	S_1	S_2	S_3	B
$\bar{p}_3$	0	0	1	$^1/_4$	$^3/_{20}$	$^7/_{60}$	$^{17}/_{60}$
$\bar{p}_2$	0	1	0	0	$^1/_5$	$^1/_{15}$	$^4/_{15}$
$\bar{p}_1$	1	0	0	$^1/_4$	$^{-1}/_{20}$	$^3/_{20}$	$^7/_{20}$
c_j	0	0	0	$^1/_2$	$^3/_{10}$	$^1/_{10}$	$^9/_{10}$

$\bar{q}_1 \quad \bar{q}_2 \quad \bar{q}_3$

حلول البرنامج الأصلي

بما أن المتغيرات الأساسية لدالة الهدف أصبحت كلها أكبر أو تساوي صفر نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل و الجدول الثالث هو الجدول النهائي.

من خلال الجدول نلاحظ أن حلول البرنامج الثنائي هي:

$$w = \frac{9}{26}\ , \bar{q}_1 = \frac{5}{26}, \bar{q}_2 = \frac{3}{26}, \bar{q}_3 = \frac{1}{26}$$

نستنتج حلول البرنامج الأصلي من جدول السمبلكس النهائي و هي:

$$z = \frac{9}{26}\ , \bar{p}_1 = \frac{7}{52}, \bar{p}_2 = \frac{4}{39}, \bar{p}_3 = \frac{17}{156}$$

بما أننا فرضنا من البداية أن :

$$z = w = \frac{1}{v}$$

و

$$\bar{q}_i = \frac{q_i}{v}\ \ , \bar{p}_i = \frac{p_i}{v}$$

نقوم بحساب كل من p_i, v, q_i

$$\frac{1}{v} = \frac{9}{10} \rightarrow v = \frac{10}{9}$$

$$\bar{q}_i = \frac{q_i}{v} \rightarrow q_i = v \times \bar{q}_i$$

$$q_1 = \frac{10}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{9} \quad , q_2 = \frac{10}{9} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{9} \quad , q_3 = \frac{10}{9} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{9}$$

$$\bar{p_i} = \frac{p_i}{v} \rightarrow p_i = v \times \bar{p_i}$$

$$p_1 = \frac{10}{9} \times \frac{7}{20} = \frac{7}{18} \quad , p_2 = \frac{10}{9} \times \frac{4}{15} = \frac{8}{27} \quad , p_3 = \frac{10}{9} \times \frac{17}{60} = \frac{17}{54}$$

بما أننا قلبنا الأدوار و إشارات المصفوفة نقلب إشارة قيمة المباراة لتصبح لصالح لاعب العمود في المصفوفة الأصلية المباراة

$$v = -\frac{10}{9}$$

و هي نفس النتائج المتوصل إليها سابقا.

XII. تمارين مقترحة

XII.1. ترغب شركتان متنافستان في إتخاذ قرار حيال وضع خطط جديدة للدعاية و قد إعتبرت الشركة A سياستين بديلتين لإتخاذ قرار بشأنهما :

الإعلان في كافة وسائل الإعلان

الإعلان في الصحف فقط

و إعتبرت الشركة B بديلين آخرين هما:

- إجراء مسابقات
- عمل تخفيضات شاملة

فإن أعلن الشركة A في كافة وسائل الإعلان و أجرت الشركة B مسابقات فإن الشركة A ستزيد حصتها السوقية على حساب الشركة B بنسبة 4% و إذا أعلنت A في كافة وسائل الإعلان و أجرت B تخفيضات شاملة فإن A ستخسر 1% من حصتها السوقية لصالح B ، أما إذا أعلنت A في الصحف فقط و أجرت B مسابقات فإن A سوف تخسر 2% و أخيرا إذا أعلنت A في الصحف فقط و أجرت B تخفيضات شاملة فإن A ستجني 1%.

المطلوب

1. بناء مصفوفة الدفع

2. حل المباراة بالطريقة الحسابية و الطريقة الجبرية

XII.2. أوجد الإستراتيجيات المثلى و قيمة المباراة بإستخدام المصفوفات الفرعية و الطريقة البيانية للمصفوفات التالية:

	اللاعب B		
اللاعب A	6	4	3
	4	6	7

	اللاعب B	
اللاعب A	3	2
	2	3
	1	4

XII.3. لتكن لديك مصفوفة مباراة كالتالي:

	اللاعب B		
اللاعب A	3	2	2
	2	3	1
	1	2	3

المطلوب

حل المباراة بإستخدام البرمجة الخطية

قائمة المراجع

1.أحمد محمد غنيم ، **الأساليب الكمية : المفاهيم العلمية و التطبيقات الإدارية** ، الجزء الثاني، المكتبة العصرية، مصر، 2010.

2.جمال عبد العزيز صابر، **بحوث العمليات في المحاسبة**، كلية التجارة جامعة القاهرة، مصر ، 2009.

3.حلمي شحادة ، **القرار النموذجي** ، مركز يزيد للنشر ، عمان: الأردن ،2005.

4.حمودي حاج صحراوي ، **رياضيات المؤسسة**، دار النشر جيطالي ، الجزائر ، 2014.

5.رحيم حسين، **أساسيات نظرية القرار والرياضيات مالية**، منشورات دار إقرأ ، الجزائر، ط1،2011.

6. رند عمران مصطفى الأسطل، **بحوث العمليات و الأساليب الكمية في صنع القرارات الإدارية** ، جامعة فلسطين، فلسطين، ط6 ، 2016.

7. ريتشارد برونس، **نظريات و مسائل في بحوث العمليات**، ترجمة حسن حسني الغباري، الدار الدولية للإستثمارات الثقافية ، مصر ، ط2، 2002.

8.زيد تميم البلخي، **مقدمة في بحوث العمليات** ، دار جامعة سعود للنشر، السعودية، 1998.

9.ساهر محمد رشاد، **الأساليب الكمية في إتخاذ القرار** ، دار النهضة العربية، مصر،2011.

10.سليمان محمد مرجان، **بحوث العمليات** ، الجامعة المفتوحة، طرابلس، ليبيا، 2002.

11. صباح الدين يقجه جي و آخرون ،**بحوث العمليات** ، المركز العربي للتعريب و الترجمة ، دمشق: سوريا،1998.

12.مريزق عدمان ، **تسيير الإنتاج و العمليات : مدخل نظري و تطبيقي** ، جسور للنشر و التوزيع ، الجزائر ،2013.

13.مكيد علي، **بحوث العمليات و تطبيقاتها الإقتصادية**،الجزء الثاني، ديوان المطبوعات الجامعية ، الجزائر ،2016.

14.موسى حسب الرسول ، **الأساليب الرياضية في إتخاذ القرارات**، مؤسسة شباب الجامعة ، الإسكندرية: مصر ، 2006.

الملحق رقم (1): جدول التوزيع الطبيعي

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4986	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990