جامعة زيان عاشور بالجلفة
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
قسم العلوم الاقتصادية

مطبوعة بيداغوجية موجهة لطلبة السنة الثانية علوم تجارية كمرجع مشترك بعنوان:

دروس في مقياس الإحصاء 3

إعداد الأستاذ: د. بن خليف طارق

السنة الجامعية: 2021/2020

المجلس العلمي
للكليـــة

المحتويات	الصفحة
المحتويات	3 – 1
تقديم	4
I. تذكير ببعض مبادئ الاحتمالات	5
1.I التحليل التوفيقي	5
1.1.I القائمة	5
2.1.I التراتيب	5
3.1.I التباديل	5
4.1.I التوفيقات	6
2.I الفضاء الاحتمال	7
1.2.I التجربة العشوائية	7
2.2.I الحدث العشوائي	7
3.2.I الاحتمال	8
3.I الاحتمال الشرطي والاستقلالية	10
1.3.I الاحتمالات الشرطية	10
2.3.I قانون الاحتمالات المركبة	11
3.3.I قانون الاحتمالات الكلية	11
4.3.I قانون باي(Bayes' theorem)	12
5.3.I الاستقلالية	13
4.I المتغيرات العشوائية والقوانين الاحتمالية المستمرة الأكثر استخداما	15
1.4.I تعريف المتغير العشوائي	15
1.1.4.I المتغيرات العشوائية المتقطعة	15
2.1.4.I المتغيرات العشوائية المستمرة	19
2.4.I القوانين الاحتمالية المستمرة	23
1.2.4.I قانون التوزيع الطبيعي	23
2.2.4.I قانون توزيع كي-التربيعي	27
3.2.4.I قانون توزيع ستيودنت	29
4.2.4.I قانون توزيع فيشر	31

جامعة زيان عاشور بالجلفة
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

II. نظرية توزيع المعاينة العلمي	**33**
1.II مفاهيم إحصائية	33
1.1.II المجتمع الإحصائي	33
2.1.II العينة	33
2.II توزيع المعاينة للمتوسطات الحسابية	33
3.II توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين	35
4.II توزيع المعاينة لنسبة صفة ما r	37
5.II توزيع المعاينة للتباين	37
6.II توزيع المعاينة لنسبة تباينين	38
III. نظرية التقدير	**39**
1.III خصائص المقدر	39
1.1.III خاصية عدم التحيز	39
2.1.III خاصية الكفاءة أو الفعالية	40
3.1.III خاصية التقارب	40
2.III التقدير النقطي	41
3.III التقدير بالمجال	
1.3.III تقدير متوسط المجتمع	41
2.3.III تقدير الفرق بين متوسطين	43
3.3.III تقدير نسبة صفة ما في المجتمع	45
4.3.III تقدير تباين المجتمع	45
5.3.III تقدير نسبة تباينين	46
IV. اختبار الفروض	**47**
1.IV اختبار المتوسط	49
2.IV اختبار الفرق بين متوسطين	55
3.IV اختبار نسبة صفة ما في المجتمع	60
4.IV اختبار التباين	62
5.IV اختبار نسبة تباينين	66
V. تمارين ومسائل متقرحة مع الحلول	**71**
1.V بالنسبة لتوزيعات المعاينة	71

جامعة زيان عاشور بالجلفة
المجلس العلمي
للكلية
كلية العلوم الاقتصادية و علوم التسيير

1.1.V التمارين والمسائل	71
2.1.V الحلول	73
2.V بالنسبة للتقدير والاختبار الفرضيات	79
1.2.V التمارين والمسائل	79
2.2.V الحلول	83
المراجع	106

تقديم

تهتم عموما نظرية الاحتمالات بدراسة الظواهر العشوائية، وهي بذلك تعتبر الدعامة الأساسية لبناء قواعد الإحصاء الرياضي، فمن اجل الوصول إلى فهم سليم لهذا العلم يجب أولاً التركيز على مفهوم الاحتمال وإجراء بعض التطبيقات على نظرية الاحتمالات كمدخل لعلم الإحصاء الرياضي.

وبغيت تحقيق ذلك كان من الضروري علينا أن نتطرق ولو بإيجاز لبعض المفاهيم الأساسية المتعلقة بحساب الاحتمال وذلك بتطرق للأحداث المانعة وغير مانعة وكذلك الأحداث المستقلة وغير مستقلة، كما نشرح مفهوم الاحتمال الشرطي، نظرية الاحتمال الكلي ونظرية الاحتمال السببي(نظرية بايز)، وفي نهاية هذا سنتطرق لمفهوم المتغيرات العشوائية وأنواعها، لان معرفة المتغيرات العشوائية وكيفية تشكلها تساعد على استخلاص القوانين التي تحكم هذه المتغيرات العشوائية وبالتالي يمكننا تفسير سلوكها والتحكم فيه، غير انه لا يمكننا تحديد كل القوانين الاحتمالية التي تتبعها جميع المتغيرات العشوائية، وعليه سنقتصر في هذا التذكير على ذكر بعض القوانين الاحتمالية المستمرة الأكثر استعمالاً والتي ستحتاج إليها في نظرية المعاينة والتقدير.

في عالم المال والأعمال تقوم المؤسسات والشركات عن طريق مصالح البحوث والتطوير بإجراء استقصاءات للاطلاع على توجهات المستهلكين أو مدى جودة منتج ما، فبدلاً من أن تقوم المؤسسة بدراسة كل المجتمع الإحصائي(دراسة المعالم أو الخصائص التي يتميز بها هذا المجتمع الإحصائي مثل متوسط المجتمع μ وانحرافه المعياري σ ونسبة صفة ما في المجتمع P) والتي هي عملية مكلفة للمال والزمن، ولذلك تلجأ المؤسسات والشركات إلى عملية المعاينة وهي اخذ عينة من المجتمع الأصلي ودراستها مثلاً (حساب متوسط العينة $\overline{X}$ وانحرافها المعياري S ونسبة صفة ما في العينة r)، ويمكننا استخدام هذه القيم المحسوبة من العينة لتقدير المعالم المناظرة لها في المجتمع الإحصائي واختبار بعض الفروض على المجتمع الإحصائي.

ولكي تكون عملية المعاينة سليمة يجب أن تكون العينة المأخوذة ممثلة لهذا المجتمع الإحصائي ويتحقق ذلك بالمعاينة العشوائية أي أن احتمال دخول أي فرد في العينة متساوي. وحتى نصل إلى عملية التقدير واختبار الفروض يجب أولاً أن نحدد الأسس النظرية لتوزيع المعاينة، والتي نخصص لها النقطة الثانية. أما في النقطة الثالثة فنهتم بعملية التقدير وذلك حسب طريقتين وهما التقدير النقطي وطريقة التقدير بالمجال. في النقطة الرابعة نوضح طريقة اختبار بعض الفروض الإحصائية، وأخيراً نقترح بعض التمارين والمسائل المحلولة لتوضيح وترسيخ كل ما جاء في هذه المطبوعة.

I. تذكير ببعض مبادئ الاحتمالات

تعتبر نظرية الاحتمال نظرية رياضية تدرس الظواهر العشوائية، لذلك سنحاول إعطاء تقديم لأهم مبادئ هذه النظرية.

I.1 التحليل التوفيقي(Combinational analysis)

إن لدراسة المجموعات أهمية كبيرة وضرورية لدراسة الاحتمال، والمجموعة هي تجمع أي عدد من العناصر أو الأشياء. ولحساب أصلي المجموعة أو عدد عناصر المجموعة، نستعين بعناصر التحليل التوفيقي باعتباره أحد طرق العد.

- تمثل المجموعات بحروف لاتينية كبيرة مثل: $A, B, C, \ldots$
- تمثل عناصر المجموعة بحروف لاتينية صغيرة مثل: $a, b, c, \ldots$

I.1.1 القائمة(List)

تعريف

لتكن لدينا المجموعة E والمتكونة من n عنصر مختلفة فيما بينها، نسمي قائمة من p عنصر من E كل متتالية مرتبة من p عنصر مأخوذة بإرجاع من E . عدد القوائم الممكنة هو: n^p

مثال

إذا كانت: $E = \{a, b, c\}$ ، فعدد القوائم المكونة من عنصرين($p = 2$) من E هو: $n^p = 3^2 = 9$ وهي:

$$aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$$

I.1. 2 التراتيب(Arrangements)

تعريف

لتكن لدينا المجموعة E والمتكونة من n عنصر مختلفة فيما بينها، نسمي ترتيبه من p عنصر من E ، كل متتالية مرتبة من p عنصر مأخوذة بدون بإرجاع من E ، يكون عدد التراتيب هو:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

حيث أن $P \leq n$.

مثال

يتكون سباق خيول من 18 حصان: عدد التراتيب المكونة من ثلاث خيول الأوائل هو:

$$A_{18}^3 = \frac{18!}{(18-3)!} = 4896$$

I.1. 3 التباديل(Permutations)

تعريف

لتكن لدينا المجموعة E والمتكونة من n عنصر مختلفة فيما بينها، نسمي تبديله من E ، كل ترتيبه مكونة من n عنصر من E ، بما أن $p = n$ عدد التباديل هو: $A_n^n = P_n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$.

ملاحظة(1)

إذا كان ضمن n من العناصر n_1 من العنصر متشابهة و n_2 من العناصر متشابهة... n_k من العناصر متشابهة فإن عدد التباديل ذات التكرار هو:

$$P_n^{n_1,n_2,...,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!..n_k!}$$

مثال

إذا كانت: $E = \{a,b,c\}$ ، فعدد التباديل المكونة من ثلاث عناصر($p = n = 3$) من E هو: $P_3 = 3! = 6$ وهي:

$$abc, acb, bca, bac, cab, cba$$

ملاحظة(2)

حسب ستيرلينق(Stirling) إذا كان n كبير جدا فإن: $n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$

I.1. 4 التوفيقات(Combinations)

تعريف

لتكن لدينا المجموعة E والمتكونة من n عنصر مختلفة فيما بينها، نسمي توفيقه من p عنصر من E ، كل متتالية غير مرتبة من p عنصر مأخوذة بدون بإرجاع من E ، عدد التوافيق هو:

$$C_n^p = A_n^p \,/\, p! = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

حيث أن $P \le n$.

مثال

1) إذا كانت: $E = \{a,b,c,d\}$ ، فعدد التوافيق المكونة من عنصرين($P = 2$) من E هو:

$$C_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!2!} = 6$$

وهي: ab, ac, ad, bc, bd, cd

2) قسم يتكون من 15 طالبا، بكم طريقة يمكن أن نختار لجنة مؤلفة من 4 طلاب، نستعمل التوفيقات لان السحب بدون إرجاع(لا يمكن أن نختار طالب مرتين في لجنة واحدة) والترتيب غير مهم(إذا كانت تحتوى على الطالب محمد مثلا لا يهم ترتيبه في اللجنة):

$$C_{15}^4 = \frac{15!}{(15-4)!4!} = 1365$$

خصائص التوفيقات

- إذا كان $1 \le p \le n$ فإن: $C_n^p = C_n^{n-p}$

- مثلث باسكال(Pascal): $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$
- قانون ثنائي الحد لنيوتن(Newton's binomial)، إذا كان $a,b \in \Re, n \in \mathrm{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

2.I الفضاء الاحتمال(Probability model)

1.2.I التجربة العشوائية(Random experience)

تعريف

نسمى التجربة العشوائية E ، كل تجربة لا تكون نتيجتها معروفة مسبقا، بل تؤدي بصفة عشوائية إلى عدة نتائج ممكنة، ونسمي فضاء العينة Ω بالمجموعة الأساسية والتي تحتوي على كل النتائج الممكنة للتجربة العشوائية.

مثال

1) عند رمي زهرة نرد متزنة(لضمان عشوائية التجربة) مرة واحدة فإن النتائج الممكنة لهذه التجربة العشوائية هي: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. لو أن زهرة النرد ذات الستة أوجه تحمل نفس الرقم، تصبح التجربة غير عشوائية لأنها لا تحتمل عدة نتائج ممكنة.

2) نرمي قطعة نقد متزنة مرتين. النتائج الممكنة لهذه التجربة هي: $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$

ملاحظة

قد تكون المجموعة الأساسية غير قابلة للعد. كأن نقول نرمي قطعة نقد متزنة حتى الحصول على وجه، تصبح النتائج الممكنة للتجربة العشوائية هي: $\Omega = \{F, PF, PPF, PPPF, PPPPF, ...\}$.

2.2.I الحدث العشوائي(Random event)

تعريف

نسمي الحدث العشوائي A ، كل حدث جزئي من المجموعة الأساسية أو كل حدث يتحقق انطلاقا من نتائج التجربة العشوائية بشرط أن تكون Ω مجموعة منتهية.

مثال

عند رمي زهرة النرد المتزنة مرة واحدة، تكون المجموعة الأساسية: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

- نسمي الحدث A : الحصول على الرقم 1، إذن: $A = \{1\}$ (A حدث جزئي من Ω)؛
- نسمي الحدث B : الحصول على عدد زوجي،إذن: $B = \{2,4,6\}$ (B حدث جزئي يتحقق انطلاقا من Ω)؛

عمليات على الأحداث العشوائية

1) نسمي الحدث العكسي لـ A ونرمز له بالرمز $\overline{A}$ وهو متم A في Ω ونكتب:

$$\overline{A} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$$
$$\overline{A} \cup A = \Omega$$

مثال

عند رمي قطعة نقد متزنة مرة واحدة، إذا كان الحدث A هو الحصول على وجه: $A = \{F\}$ ، فإن الحدث العكسي $\overline{A}$ هو الحصول على كتابة: $\overline{A} = \{P\}$ حيث أن $\overline{A} \cup A = \Omega$.

2) نسمي Ω بالحدث الأكيد ونسمي المجموعة الخالية $\{\ \}$ بالحدث المستحيل.

ليكن لدينا الحدثين العشوائيين A و B :

- $A \subset B$ محقق يعني أنه إذا تحققت A فإن B محققة؛
- الحدث $A \cup B$ محقق إذا A أو B محققة: $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A ou\, \omega \in B\}$ ؛
- الحدث $A \cap B$ محقق إذا A و B محققة: $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A et\, \omega \in B\}$ ؛
- نقول عن A و B أنهما حدثين مانعين(Incompatibles) إذا: $A \cap B = \phi$ ، ومن الواضح أن الحدثين A و $\overline{A}$ دوما مانعين.

3.2.I الاحتمال(Probability)

قبل التطرق لتعريف الاحتمال، لابد من الإشارة إلى أن الثنائية $(\Omega, \Im)$ تشكل الفضاء الاحتمالي(Probabilistic space) بحيث تمثل $\Im$ مجموعة أحداث Ω المتعلقة بالتجربة العشوائية بحيث أنه:

- إذا كان $A \in \Im$ فإن: $\overline{A} \in \Im$
- من أجل كل عائلة الأحداث العشوائية $(A_n); n \geq 0$ ، لدينا: $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \Im$

تعريف

نسمي احتمال في الفضاء $(\Omega, \Im)$ كل تطبيق P من $\Im$ نحو $[0,1]$ بحيث أن: $P(\Omega) = 1$

1) إذا كانتا A و B حدثين عشوائيين مانعين إذن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2) إذا كانت $(A_n); n \geq 0$ عائلة الأحداث العشوائية المانعة مثنى مثنى، فإن: $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$

3) نسمي الآن الثلاثية $(\Omega, \Im, P)$ بفضاء الاحتمال، ويمكن حساب الاحتمال بالعلاقة التالية: $\forall A \in \Im$ فإن:

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

حيث أن:

$card(A)$: يمثل أصلي أو عدد الحالات الملائمة(Favorable)

$card(\Omega)$: يمثل أصلي أو عدد الحالات الممكنة(Possible)

مثال(1)

1) نسمي الحدث A : الحصول على عدد زوجي عند رمي زهرة نرد متزنة مرة واحدة. احتمال A هو:

$$P(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

2) نسمي الحدث ω : الحصول على العدد i عند رمي زهرة نرد متزنة مرة واحدة، حيث $i=\overline{1,6}$ ، احتمال ω هو دائما:

$$P(\omega)=\frac{1}{card(\Omega)}=\frac{1}{6}$$

هذا الاحتمال يسمى أحادي الشكل ويعني إن كل الأحداث الجزئية لـ Ω لها نفس احتمال الحدوث.

مثال(2)

نرمي زهرة نرد متزنة مرتين: المجموعة الأساسية هي: $\Omega=\{(1;1),(1,2),...,(6,6)\}=6\times 6=36$

نعرف الحدث A : مجموع العددين الظاهرين يساوي 4. إذن: $A=\{(1;3),(3,1),(2,2)\}\Rightarrow card(A)=3$.

احتمال A هو:

$$P(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{3}{36}$$

خصائص

إذا كانتا A و B حدثين عشوائيين، لدينا:

1) $0\le P(A)\le 1$ و $P(\overline{A})=1-P(A)$ ، وتسمى بنظرية الاحتمال العكسي وتستعمل عادة إذا كان من الصعب إيجاد احتمال A ؛

2) احتمال المجموعة الخالية: $P(\phi)=0$ ؛

3) إذا $A\subset B$ فإن: $P(A)\le P(B)$ ؛

4) إذا كانت Ω قابلة للعد، إذا: $P(A)=\sum_{\omega\in A}P(\omega)$

5) قانون بوانكاري(Poincaré): $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

6) قانون كريبل(Crible):

$$P(A_1\cup A_2\cup ...\cup A_n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k P(A_1\cap A_2\cap ...\cap A_n)$$

7) حالة خاصة بالنسبة لثلاثة أحداث عشوائية A ، B و C يكون:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

I.3 الاحتمال الشرطي والاستقلالية(Conditional probability independence)

I.3.1 الاحتمالات الشرطية(Conditional probability)

نرمي زهرة نرد متزنة مرتين، تكون لدينا المجموعة الأساسية: $\Omega = \{(1,1),(1,2),...,(6,6)\}$ ، إذا $card(\Omega) = 36$ ، حيث أن كل الأحداث الجزئية لـ Ω لديها نفس احتمال الحدوث وهو 1/36 .

ليكن الحدث A :مجموع النقاط اكبر أو يساوي العدد 10، إذن: $A = \{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$ ، ومنه:

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} .$$

نفترض الآن الأحداث B_i : نتيجة النرد الأولى تساوي i ، حيث $i = \overline{1,6}$ ، نأخذ الآن كمثال B_5 :

$$B_5 = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,6)\}$$

- إذا تحقق الحدث B_1 فإن الحدث A لا يتحقق لأن مجموع النقاط لا يتجاوز 7، نقول أن الاحتمال الشرطي للحدث A إذا تحقق الحدث B_1 يساوي 0 ونرمز له بالرمز $P(A/B_1) = 0$
- إذا تحقق الحدث B_5 فإن للحصول على المجموع يساوي 10، لابد أن تكون نتيجة النرد الثانية 5 أو 6 إذن:

$$P(A/B_5) = 1/6 + 1/6 = 1/3 .$$

نلاحظ أن الحدث $A \cap B_5$ هو: $A \cap B_5 = \{(5,5),(5,6)\}$ أي أن: $P(A \cap B_5) = 2/36 = 1/18$.

بالإضافة إلى أن احتمال الحدث B_5 هو: $P(B_5) = 6/36 = 1/6$ ، وبقسمة $P(A \cap B_5)$ على $P(B_5)$ نجد أنه يساوي $P(A/B_1)$ كما يلي:

$$P(A/B_1) = \frac{P(A \cap B_5)}{P(B_5)} = \frac{1/18}{1/6} = \frac{1}{3}$$

ومنه نستنتج تعريف الاحتمال الشرطي.

تعريف

ليكن $(\Omega, \Im, P)$ فضاء الاحتمال، وليكن A و B حدثين عشوائيين بحيث أن $P(B) \neq 0$. نسمي الاحتمال الشرطي لـ A علما أن B محقق بالعدد الحقيقي:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} .....(*)$$

بحيث أنه إذا كان: $P(B) = 0$ فإن الاحتمال الشرطي غير معرف.

ملاحظات

1) من أجل A في $\Im$ لدينا $0 \leq P(A/B) \leq 1$ لأن: $(A \cap B) \subset B$. بالإضافة إلى ذلك:

$$P(\Omega/B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

2) إذا كان الحدثين A و C مانعين فإن:

$$P(A\cup C/B)=\frac{P((A\cup C)\cap B)}{P(B)}=\frac{P((A\cap B)\cup(C\cap B))}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}+\frac{P(C\cap B)}{P(B)}=P(A/B)+P(C/B)$$

3) إذا كانت $(A_n)_{n\geq 0}$ عائلة أحداث مانعة مثنى مثنى فإن:

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n\Big/B\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(A_n/B)$$

4) لدينا الخاصية التالية: $P(\overline{A}/B)=1-P(A/B)$

I.3.2 قانون الاحتمالات المركبة(Multiplication formula)

ليكن A و B حدثين عشوائيين، انطلاقا من العلاقة (*)، يمكن أن نكتب:

- إذا كان $P(A)\neq 0$ فان: $P(A\cap B)=P(A)P(B/A)$
- إذا كان $P(B)\neq 0$ فان: $P(A\cap B)=P(B)P(A/B)$

ونسمي عندئذ $P(A\cap B)$ بالاحتمال المركب.

وبطريقة أكثر تعميم إذا كنا نملك n حدث عشوائي $A_1,A_2,...,A_n$ مع علم أن: $P(A_i)\neq 0$ ، يكون:

$$P(A_1\cap A_2\cap...\cap A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)..P(A_n/A_1\cap A_2\cap...\cap A_{n-1})$$

مثال

لدينا صندوق يحتوي على 10 كريات(5 حمراء، 3 زرقاء، 2 بيضاء). نسحب بدون إرجاع 3 كريات من الصندوق. أحسب احتمال الحصول بالترتيب على كريه حمراء، كريه زرقاء وكريه بيضاء.

نعرف الأحداث التالية:

A : الكريه الأولى المسحوبة حمراء؛

B : الكريه الثانية المسحوبة زرقاء؛

C : الكريه الثالثة المسحوبة بيضاء.

نبحث الآن عن الاحتمال $P(A\cap B\cap C)$ ، وباستعمال قانون الاحتمالات المركبة، يكون لدينا:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B/C)P(C/A\cap B)=?$$

لدينا: $P(A)=5/10$ ، $P(B/C)=3/9$ ، $P(C/A\cap B)=2/8$ إذن:

$$P(A\cap B\cap C)=5/10\times 3/9\times 5/10=1/24$$

I.3.3 قانون الاحتمالات الكلية(Law of total probability)

ليكن A و B حدثين عشوائيين، مع $P(A)\neq 0$ و $P(A)\neq 1$ ، يمكن أن نكتب:

$$P(B)=P(A)P(B/A)+P(\overline{A})P(B/\overline{A})$$

ونسمي $P(B)$ بالاحتمال الكلي.

وبطريقة أكثر تعميم، إذا كانت $(A_i)_{i\in I}$ تشكل تقسيم لـ Ω، يعني أن $\Omega=\bigcup_{i\in I}A_i$ ومن أجل $i,j\in I$ مع $i\neq j$ فإن الأحداث مانعة مثنى مثنى $A_i\cap A_i=\phi$، يكون لدينا: $P(B)=\sum_{i\in I}P(A_i)P(B/A_i)$

مثال

لدينا 3 قطع نقدية، حيث أن القطعة الأولى متزنة، القطعة الثانية تحتوي على كتابتين(2P) والقطعة الثالثة تحتوى على وجهين(2F). نسحب عشوائيا قطعة نقدية. احسب احتمال الحصول على كتابة(P).

نعرف الحدثين التاليين:

A_i : سحب القطعة i، بحيث $i=1,2,3$

B : الحصول على كتابة(P).

نبحث عن الاحتمال $P(B)$. باستعمال قانون الاحتمالات الكلية، لدينا:

$$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)$$

لدينا: $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=1/3$ ، $P(B/A_1)=1/2$ ، $P(B/A_2)=2/2=1$ ، $P(B/A_3)=0/2=0$

إذن يكون: $P(B)=1/3\times1/2+1/3\times1+1/3\times0=1/2$

4.3.I قانون بايز(Bayes' theorem)

نظرية

ليكن A و B حدثين عشوائيين، مع $P(A)\neq0$ و $P(B)\neq0$. إذن، قانون بايز هو:

$$P(A/B)=\frac{P(A)P(B/A)}{P(A)P(B/A)+P(\overline{A})P(B/\overline{A})}$$

وبطريقة أكثر تعميم، إذا كانت $(A_i)_{i\in I}$ تشكل تقسيم لـ Ω، من أجل كل $j\in I$ ، لدينا:

$$P(A_j/B)=\frac{P(A_j)P(B/A_j)}{\sum_{i\in I}P(A_j)P(B/A_j)}$$

عادت ما يستعمل قانون باير عندما نريد معرفة سبب وقوع الحدث وخاصة أسباب وقوع حوادث المرور، لأن النتيجة معروفة وهي حادث المرور ونريد معرفة السبب الذي أدى إلى وقوعه.

البرهان

لدينا قانون الاحتمال الشرطي: $P(A_j/B)=\frac{P(B\cap A_j)}{P(B)}$

لدينا كذلك قانون الاحتمال الكلي: $P(B)=\sum P(A_j)P(B/A_j)$

تصبح لدينا العلاقة التالية: $P(A_j/B)=\frac{P(B\cap A_j)}{\sum P(B/A_j)P(A_j)}$

ويمكننا أن نكتب العلاقة السابقة على النحو: $$P(A_j/B)=\frac{P(B\cap A_j)\times\frac{P(A_j)}{P(A_j)}}{\sum P(B/A_j)P(A_j)}$$

نلاحظ في البسط أن: $$\frac{P(B\cap A_j)}{P(A_j)}=P(B/A_j)$$

ومنه يكون قانون بايز: $$P(A_j/B)=\frac{P(B/A_j)P(A_j)}{\sum P(B/A_j)P(A_j)}$$

مثال

نعود للمثال السابق، نسحب عشوائيا قطعة نقد نحصل على كتابة(P). ما هو احتمال أن تكون من القطعة الثانية والتي تحتوي على كتابتين(2P).

هنا نستعمل قانون بايز لأن النتيجة معروفة ونريد معرفة سبب حدوثها، نحسب احتمال أن تكون القطعة الثانية هي المسحوبة علما أن نتيجة السحب هي كتابة كما يلي:

$$P(A_2/B)=\frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(B)}=\frac{1/3\times 2/2}{1/2}=\frac{2}{3}$$

5.3.I الاستقلالية(Independence)

تعاريف

1) ليكن $(\Omega,\Im,P)$ فضاء الاحتمال، وليكن A و B حدثين عشوائيين، نقول أن A و B حدثين مستقلين إذا كان:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

2) إذا كان لدينا n حدث عشوائي: $A_1,A_2,...,A_n$ ، نقول أن هذه الأحداث مستقلة مثنى مثنى من أجل كل ثنائية (i,j) مع $i\neq j$ يكون لدينا: $P(A_i\cap A_j)=P(A_i)\times P(A_j)$

3) هذه الأحداث $A_1,A_2,...,A_n$ مستقلة ككل من أجل كل $k=1,2,...,n$ يكون لدينا:

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap...\cap A_{i_k})=P(A_{i_1})\times P(A_{i_2})\times...P(A_{i_k})$$

أمثلة

1) لدينا صندوق يحتوي على 3 كريات سوداء و7 كريات بيضاء. نقوم بالسحب مرتين متتاليتين بالإرجاع. من أجل $i=1,2$ نضع: A_i : الحصول على الكريه السوداء في السحب i . فإن:

$$P(A_1)=P(A_2)=\frac{3}{10} \quad \text{و} \quad P(A_1\cap A_2)=\frac{3^2}{10^2}$$

ولأن السحب بالإرجاع، فان: $P(A_1\cap A_2)=P(A_1)\times P(A_2)=\frac{9}{100}$

وبالتالي: $P(A_1\cap A_2)=P(A_1)\times P(A_2)$ ومنه فإن A_1 و A_2 مستقلين($A_1 \amalg A_2$).

أما إذا كان السحب بدون إرجاع فإن: A_1 و A_2 غير مستقلين عن بعض، يكون لدينا: $P(A_1)=\frac{3}{10}$

ولحساب $P(A_2)$ ، نستعمل قانون الاحتمال الكلي:

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2/A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2/\overline{A_1})=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{27}{90}=\frac{2}{3}$$

كذلك لحساب $P(A_1\cap A_2)$ ، نستعمل قانون الاحتمال الشرطي:

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_1)P(A_2/A_1)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$$

وبالتالي فان: $P(A_1\cap A_2)\neq P(A_1)\times P(A_2)$ ومنه فإن A_1 و A_2 غير مستقلين.

2) نرمي زهرتي نرد متزنتين. ولتكن الأحداث التالية:

A : زهرة النرد الأولى تعطي عدد زوجي؛

B : زهرة النرد الثانية تعطي عدد زوجي؛

C : مجموع زهرتي النرد يعطي عدد زوجي.

لدينا:

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\ ،\ P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\ ،\ P(C)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}\ ،\ P(A\cap B)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}\ ،\ P(A\cap C)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}\ ،$$

$$P(B\cap C)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}\ ،\ P(A\cap B\cap C)=P(A\cap B)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

وبالتالي كل من A ، B و C مستقلة مثنى مثنى، ولا كنها غير مستقلة ككل لأن:

$$P(A\cap B\cap C)\neq P(A)\times P(B)\times P(C)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{8}$$

ملاحظة

يجب أن نفرق بين حدثين مانعين وحدثين مستقلين. فإذا كان الحدثين مستقلين فإن $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ أما إذا كانا مانعين فإن: $P(A\cap B)=0$ لأن $A\cap B=\phi$.

خصائص

ليكن A و B حدثين عشوائيين مستقلين، مع $P(A)\neq 0$ و $P(B)\neq 0$.

1) يكون لدينا: $P(A/B)=P(A)$ و $P(B/A)=P(B)$ ؛

2) $\overline{A}$ و B مستقلين، A و $\overline{B}$ مستقلين، $\overline{A}$ و $\overline{B}$ مستقلين.

I.4 المتغيرات العشوائية والقوانين الاحتمالية المستمرة الأكثر استخداما

I.4.1 المتغيرات العشوائية(The random variables)

ويمكننا أن نميز ضمنها نوعين وهما المتغيرات العشوائية المتقطعة والمستمرة:

I.4.1.1 المتغيرات العشوائية المتقطعة

تعريف

لتكن Ω المجموعة الأساسية المرتبطة بالتجربة العشوائية E ، نسمي المتغير العشوائي الحقيقي كل تطبيق X من Ω نحو $\Re$ ، ونكتب:

$$X : \Omega \to \Re$$
$$\omega \to X(\omega)$$

ونسمي $X(\Omega)$ بصورة Ω بالتطبيق X وهي تضم كل مشاهدات X .

ملاحظة

إذا كانت Ω مجموعة محدود وقابلة للعد فان القيم الحقيقية التي يأخذها المتغير العشوائي X تكون بالضرورة هي جزء محدود من $\Re$ ، ونكتب: $X(\Omega) = \{x_1; x_2; .....x_k\}$

$$(X = x_i) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i\}$$

ونقول عندئذ أن X متغير عشوائي متقطع، ونكتب كذلك: $X^{-1}(x_i) = (X = x_i)$

مثال

نرمي زهرة نرد متزنة مرتين يكون لدينا المجموعة الأساسية التالية:

$$\Omega = \{(a,b); a,b \in \{1,2,....6\}\} = \{(1,1); (1,2); .....(6,6)\}$$

ومن اجل كل حدث جزئي ω يمكننا أن نعرف المتغير العشوائي X بمجموع نتيجة الرميتين $(a+b)$ ، ونكتب:

$$X : \Omega \to \Re$$
$$\omega \to X(\omega) = a + b$$

تكون مجموعة مشاهدات المتغير العشوائي X : $X(\Omega) = \{2;3;.....12\}$

نلاحظ في هذا المثال أن Ω مجموعة محدود وقابلة للعد وبالتالي فان $X(\Omega)$ منتهية.

أ. تعريف قانون الاحتمال

ليكن لدينا الفضاء الاحتمالي $(\Omega, P(\Omega), P)$ و Ω مجموعة محدود وقابلة للعد، وليكن X متغير عشوائي متقطع يأخذ قيمه في المجموعة $X(\Omega) = \{x_1; .....x_k\}$ ، نسمي قانون الاحتمال P_X كل تطبيق من $X(\Omega)$ نحو $[0;1]$ ونكتب:

$$P_X : X(\Omega) \to [0;1]$$
$$x_i \to P(X = x_i)$$

مثال

نقوم برمي قطعة نقدية متزنة ثلاث مرات، تكون المجموعة الأساسية Ω هي:

$$\Omega = \{(P,P,P);(P,P,F);(P,F,P);(P,F,F);(F,P,P);(F,P,F);(F,F,P);(F,F,F)\}$$

وليكن X المتغير عشوائي الذي يقيس عدد مرات ظهور الكتابة P ، تكون مجموعة قيمه هي: $X(\Omega) = \{0;1;2;3\}$

وتكون احتمالات قيم هذا المتغير العشوائي X هي:

$$P_X(0) = P(X^{-1}(0)) = P(X=0) = P((F,F,F)) = 1/8$$

$$P_X(1) = P(X^{-1}(1)) = P(X=1) = P((P,F,F);(F,P,F);(F,F,P)) = 3/8$$

$$P_X(2) = P(X^{-1}(2)) = P(X=2) = P((P,P,F);(F,P,P);(P,F,P)) = 3/8$$

$$P_X(3) = P(X^{-1}(3)) = P(X=3) = P((P,P,P)) = 1/8$$

يكون قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :

x_i	0	1	2	3	$\sum_{i=1}^{4} P(X=x_i)$
$P(X=x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

ب. دالة التوزيع المتراكمة

تعريف

ليكن X متغير عشوائي في الفضاء الاحتمالي $(\Omega, P(\Omega), P)$ و Ω مجموعة محدودة وقابلة للعد، نسمي دالة التوزيع المتراكم لـ X كل تطبيق F يكتب على النحو التالي:

$$F : \Re \to [0;1]$$
$$x_i \to F_X(x_i) = F(X=x_i) = P(X \le x_i)$$

خواص دالة التوزيع المتراكم

إذا كان X متغير عشوائي حقيقي و F_X يكتب على دالة توزيعه المتراكم، فان:

1) دالة التوزيع المتراكمة F_X هي عبارة عن دالة متدرجة؛

2) دالة التوزيع المتراكمة F_X هي دالة متزايدة ومستمرة من اليمين وغير مستمرة من اليسار؛

3) إذا كان a اقل b من فان: $P(a \prec X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$ ؛

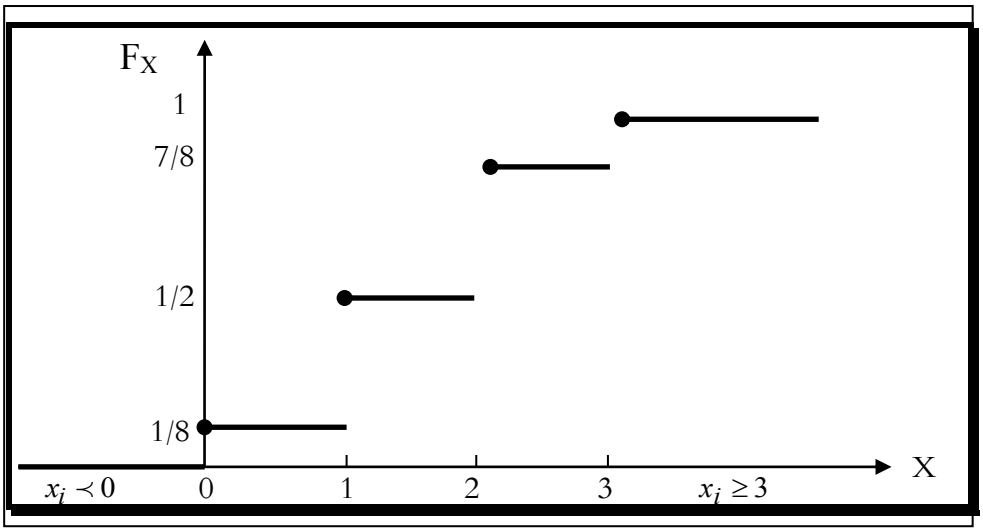
4) يمكننا كذلك أن نثبت النهايتين التاليتين: $\lim_{x_i \to -\infty} (F_X(x_i)) = 0$ و $\lim_{x_i \to +\infty} (F_X(x_i)) = 1$

مثال

من خلال المثال السابق فان دالة التوزيع المتراكم F_X تكون على النحو التالي:

$$F_X(x_i) = P(X \le x_i) = \begin{cases} 0 & x_i \prec 0 \\ P(X=0) = 1/8 & 0 \le x_i \prec 1 \\ P(X=0) + P(X=1) = 4/8 = 1/2 & 1 \le x_i \prec 2 \\ P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 7/8 & 2 \le x_i \prec 3 \\ P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 8/8 = 1 & x_i \ge 3 \end{cases}$$

ويمكننا تمثيل دالة التوزيع المتراكم F_X في الشكل التالي:



ت. دوال العزوم البسيطة والمركزية

تعريف(1)

نسمي العزم البسيط من الدرجة m للمتغير العشوائي المتقطع X ، كل دالة من الشكل:

$$E(X^m) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^m \times P(X = x)$$

عندما $m=1$ يصبح العزم البسيط من الدرجة الأولى يعبر عن الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X وهو:

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \times P(X = x_i)$$

بعض خواص الأمل الرياضي

- إذا كان X متغير عشوائي متقطع و a ، b عددين حقيقيين فان: $E(aX+b) = a \times E(X) + b$
- إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين فان: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين عن بعض فان: $E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$
- إذا كان الأمل معدوم: $E(X) = 0$ نقول عن X انه متغير عشوائي ممركز.

مثال

نحسب الأمل الرياضي في المثال السابق:

x_i	0	1	2	3	المجموع
$P(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1
$x_i \times P(X = x_i)$	0	3/8	6/8	3/8	3/2

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \times P(X = x_i) = 3/2$$

يكون الأمل الرياضي هو 3/2

تعريف(2)

نسمي العزم المركزي من الدرجة m للمتغير العشوائي المتقطع X ، كل دالة من الشكل:

$$E\left((X - E(X))^m\right) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - E(X))^m \times P(X = x_i)$$

عندما $m=2$ يصبح العزم المركزي من الدرجة الثانية يعبر عن تباين المتغير العشوائي X وهو:

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - E(X))^2 \times P(X = x_i) = V(X)$$

بعض خواص التباين

- حسب نظرية (Koenig) فان:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i^2 \times P(X = x_i) - E(X)^2$$

- إذا كان X متغير عشوائي متقطع و a ، b عددين حقيقيين فان: $V(aX + b) = a^2 \times V(X)$
- إذا كان الانحراف المعيار للمتغير العشوائي X يساوي 1: $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = 1$ فإننا نقول أن X متغير عشوائي مرجح.

مثال

نحسب التباين في المثال السابق:

x_i	0	1	2	3	المجموع
$P(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1
$x_i^2 \times P(X = x_i)$	0	3/8	12/8	9/8	3

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3 - (3/2)^2 = 3/4$$

يكون التباين هو 3/4

ويمكننا أن نقارن بين أهم قوانين التوزيعات الإحصائية والتوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المتقطعة في الجدول التالي:

التوزيعات الاحتمالية	التوزيعات الإحصائية
X متغير عشوائي	X متغير إحصائي
قانونه الاحتمالي: $P(X=x_i)$ $\sum P(X=x_i)=1$	التكرار: $f_i=\frac{n_i}{n}$ $\sum f_i=1$
الأمل الرياضي: $E(X)=\sum x_i \times P(X=x_i)$	المتوسط: $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum n_i \times x_i=\sum f_i \times n_i$
التباين: $V(X)=E\left((X-E(X))^2\right)$	التباين: $V(X)=\frac{1}{n}\sum n_i \times (x_i-\overline{X})^2$
$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$	$V(X)=\frac{1}{n}\sum n_i \times x_i^2-\overline{X}^2$

2.1.4.I المتغيرات العشوائية المستمرة

تعريف

ليكن X متغير عشوائي معرف في الفضاء الاحتمالي $(\Omega,P(\Omega),P)$ ، نقول عن X انه متغير عشوائي مستمر إذا كان يأخذ قيمه $X(\Omega)$ في جزء من الأعداد الحقيقية $\Re$. وخلافا لما رأينه في حالة المتغيرات العشوائية المتقطعة، فان مجموعة مشاهدات قيم المتغير العشوائي $X(\Omega)$ تصبح غير قابلة للعد.

أ. دالة الكثافة الاحتمالية

لتكن f_X دالة معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\Re$ ، نقول عن f_X أنها تمثل دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X إذا كانت تحقق الشروط التالية:

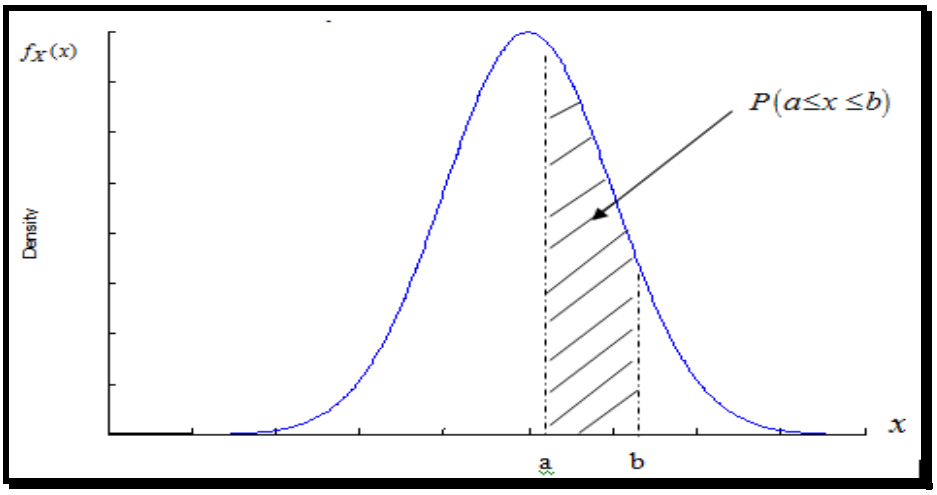
- f_X دالة مستمرة على كل $\Re$ ، وفي حالة عدم استمراريتها يجب أن يكون ذلك عند عدد محدود من الفواصل؛
- قيم f_X دوماً موجبة: $\forall x \in \Re : f_X(x) \geq 0$ ؛
- كذلك: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx=1$

بعض الخصائص المميزة لدالة الكثافة الاحتمالية

- منحنى دالة الكثافة الاحتمالية f_X يقع دوماً أعلى محور قيم المتغير العشوائي X (المحور الأفقي)؛
- تكامل دالة الكثافة الاحتمالية f_X من $-\infty$ إلى $+\infty$ يساوي 1 يعني أن مجموع كل الاحتمالات هو 1؛

- إذا كان a و b عددان حقيقيان يقعان ضمن مجال تعريف المتغير العشوائي X و f_X دالة كثافته الاحتمالية فان:

$$P(a \prec X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$



يعني أن $P(a \prec X \leq b)$ يمثل المساحة الواقعة بين منحنى الكثافة من الأعلى ومحور قيم المتغير العشوائي X من الأسفل والمستقيمين $x = a$ من اليسار والمستقيم $x = b$ من اليمين.

- بالاعتماد على الخاصية السابقة يمكننا أن نكتب:

$$\forall a \in \Re : P(X = a) = P(a \prec X \leq a) = \int_a^a f_X(x)\,dx = 0$$

- يمكننا أن نكتب كذلك:

$$P(X \succ a) = P(X \geq a) = \int_a^{+\infty} f_X(x)\,dx$$

مثال

ليكن X متغير عشوائي مستمر و f_X تمثل دالة كثافته الاحتمالية المعرفة على النحو التالي:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x \prec 0 \end{cases}$$

تحقق من أن f_X تمثل دالة كثافة احتمالية، ثم احسب: $P(-2 \prec X \leq 1/4)$

في البداية نلاحظ أن f_X هي دالة معرفة على $\Re$ ومستمرة ماعدا عند الفاصلة 0 كما أنها موجبة، كما أننا نلاحظ أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = [a]_{-\infty}^{0} + \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = (a-a) + (-0-(-1)) = 1$$

حساب: $P(-2 \prec X \leq 1/4)$

$$P(-2 \prec X \leq 1/4) = \int_{-2}^{1/4} f_X(x)dx = \int_{-2}^{0} 0dx + \int_{0}^{1/4} e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{1/4} = 1-e^{-1/4} \cong 0.24$$

ب. دالة التوزيع المتراكمة

ليكن X متغير عشوائي مستمر معرف على جزء من $\Re$ ، و f_X دالة كثافته الاحتمالية. نقول عن F_X أنها تمثل دالة التوزيع المتراكمة للمتغير عشوائي X إذا كانت F_X تكتب على النحو التالي:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

بعض الخصائص المميزة لدالة التوزيع المتراكمة

- إذا كان a و b عددان حقيقيان يقعان ضمن مجال تعريف المتغير العشوائي X و F_X دالة توزيعه المتراكم فان: $P(a \prec X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
- دالة التوزيع المتراكمة F_X مستمرة على $\Re$.

مثال

في نفس المثال السابق اوجد دالة التوزيع المتراكمة F_X ، ثم اعد حساب: $P(-2 \prec X \leq 1/4)$.

لدينا: $$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

$$F_X(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\,dt & si \quad x \prec 0 \\ \int_{-\infty}^{x} e^{-t}\,dt & si \quad x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & si \quad x \prec 0 \\ \int_{0}^{x} e^{-t}\,dt & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \prec 0 \\ \left[-e^{-t}\right]_0^x & si \quad x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & si \quad x \prec 0 \\ 1-e^{-x} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

ومنه تكون دالة التوزيع المتراكمة هي على النحو التالي:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \prec 0 \\ 1-e^{-x} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

حساب: $P(-2 \prec X \leq 1/4)$

باستعمال دالة التوزيع المتراكمة يكون:

$$P(-2 \prec X \leq 1/4) = F_X(1/4) - F_X(-2) = 1-e^{-1/4} - 0 \cong 0.24$$

ت. دوال العزوم البسيطة والمركزية

تعريف(1)

نسمي العزم البسيط من الدرجة m للمتغير العشوائي المستمر X ، كل دالة من الشكل:

$$E(X^m)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^m \times f_X(x)\ \ dx$$

عندما $m=1$ يصبح العزم البسيط من الدرجة الأولى يعبر عن الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X وهو:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\times f_X(x)\ \ dx$$

مثال

في نفس المثال السابق احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\times f_X(x)dx=\int_{0}^{+\infty} x\times e^{-x}dx=\left[-(1+x)e^{-x}\right]_0^{+\infty}=1$$

تعريف(2)

نسمي العزم المركزي من الدرجة m للمتغير العشوائي المستمر X ، كل دالة من الشكل:

$$E\left((X-E(X))^m\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-E(X))^m \times f_X(x)\ \ dx$$

عندما $m=2$ يصبح العزم المركزي من الدرجة الثانية يعبر عن تباين المتغير العشوائي X وهو:

$$V(X)=E\left((X-E(X))^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-E(X))^2 \times f_X(x)\ \ dx$$

مثال

في نفس المثال السابق احسب تباين المتغير العشوائي X .

بغرض حساب التباين نستعمل الخاصية التالية: $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\times f_X(x)\ \ dx=\int_{0}^{+\infty} x^2\times e^{-x}\ \ dx=\left[-(x^2+2x+2)\times e^{-x}\right]_0^{+\infty}=2$$

يكون التباين على النحو التالي:

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=2-1^2=1$$

يكون الانحراف المعياري على النحو التالي:

$$\sigma_X=\sqrt{V(X)}=1$$

وبالتالي فان المتغير العشوائي X هو متغير مرجح.

ملاحظة

يحافظ كل من الأمل الرياضي و التباين في حالة المتغيرات العشوائية المستمرة على نفس الخصائص التي تما ذكرها في حالة المتغيرات العشوائية المتقطعة.

I.2.4 القوانين الاحتمالية المستمرة(The continuous distributions)

بعدما تعرفنا على المتغيرات العشوائية المستمرة وقوانينها الاحتمالية واهم الخصائص المميزة لها، نعمل ضمن هذا العنصر على التطرق لأهم القوانين الاحتمالية الأكثر استخداماً، حيث نستهلها بتعرف على قانون التوزيع الطبيعي وهو الأكثر استخداما ضمن الفرضيات الأساسية في بناء النماذج القياسية ثم نقدم توزيع كي التربيعي، توزيع ستيودنت وتوزيع فيشر وكلها توزيعات تستخدم في دراسة صلاحية النماذج القياسية.

I.2.4.1 قانون التوزيع الطبيعي(Normal or Gaussian distribution)

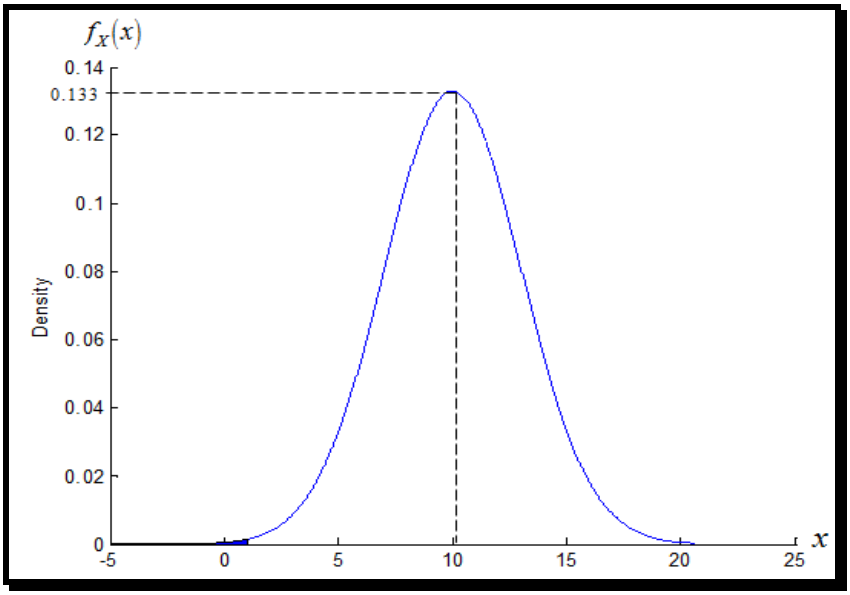
تعريف

ليكن X متغير عشوائي مستمر يأخذ قيمه في $\Re$ ، حيث أن أمله الرياضي هو μ وتباينه هو σ^2 ، نقول عن X انه يتبع التوزيع الطبيعي إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية تكتب على النحو التالي:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sigma.\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-.(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ونكتب عندئذ: $X \to N(\mu,\sigma)$

وتأخذ دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي شكلاً جرسياً و متناظر بالنسبة للمتوسط μ أي أن: $f_X(\mu+a)=f_X(\mu-a)$ ، و عند المتوسط فان دالة الكثافة تأخذ اكبر قيمة لها وهي: $f_X(\mu)=1/\sigma.\sqrt{2\pi}$ والتي تعبر عن ذروة المنحنى. فمن اجل $X \to N(10;3)$ يكون شكل دالة الكثافة هو:



وقيمة الذروة في هذه الحالة هي: $f_X(10)=1/\sigma.\sqrt{2\pi}=1/(3\times\sqrt{2\times 3.14})=0.133$

وانطلاقا من دالة الكثافة تكون دالة التوزيع المتراكمة لتوزيع الطبيعي على النحو التالي:

$$F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma.\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$$

وعلى أساس العبارة السابقة يمكننا أن نتحقق من أن:

$$\lim_{X\to-\infty}F_X(x)=0,\qquad \lim_{X\to+\infty}F_X(x)=1,\qquad F_X(0)=0.5$$

أ. المتغيرة المركزية أو المعيارية(القياسية)

ليكن X متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بأمل رياضي هو μ وتباين هو σ^2 ، نسمي $Z=(X-\mu)/\sigma$ بالمتغيرة المركزية أو المعيارية وهو متغير عشوائي مستمر له نفس طبيعة توزيع X أي انه يتبع التوزيع الطبيعي، غير انه بمتوسط معدوم و بانحراف معياري يساوي الواحد:

- الأمل الرياضي للمتغيرة المعيارية:

$$E(Z)=E\left[\frac{(X-\mu)}{\sigma}\right]=\frac{E(X)-\mu}{\sigma}=\frac{\mu-\mu}{\sigma}=0$$

- التباين للمتغيرة المعيارية:

$$V(Z)=V\left[\frac{(X-\mu)}{\sigma}\right]=\frac{V(X)-0}{\sigma^2}=\frac{\sigma^2}{\sigma^2}=1$$

- دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع الطبيعي المعياري:

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}.z^2}$$

ونكتب عندئذ: $Z\to N(0;1)$

- دالة التوزيع المتراكمة لتوزيع الطبيعي المعياري:

$$\Psi_Z(z)=F_Z(z)=P(Z\le z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}.t^2}dt$$

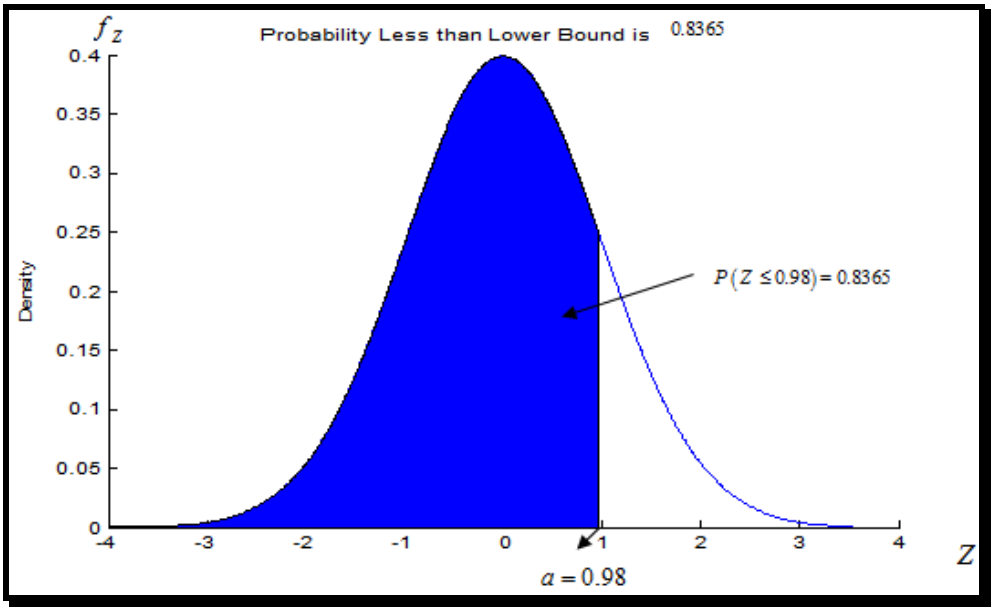
ب. كيفية استخدام جدول التوزيع الطبيعي

لكل توزيع طبيعي $X\to N(\mu,\sigma)$ جدول توزيع إحصائي خاص به على حسب المتوسط و الانحراف المعياري، فمن اجل تبسيط العملية فإننا نحول $X\to N(\mu,\sigma)$ إلى الوحدات المعيارية $Z=(X-\mu)/\sigma$ ونستعمل جدول التوزيع الإحصائي الخاص بالتوزيع الطبيعي المعياري $Z\to N(0;1)$. ففي داخل هذا الجدول نجد قيم الاحتمال P والممثل بمساحة الحيز الواقعة على يسار العدد a والمحصورة بين منحنى دالة الكثافة ومحور الفواصل، ونكتب:

$P(Z \le a) = \Psi_Z(a)$ ونقرأ العدد a من الجدول حسب الطريقة التالية: نجد في العمود الأول العدد الذي قبل الفاصلة و الرقم الأول الذي بعد الفاصلة من a أما الرقم الثاني بعد الفاصلة فنجده في السطر الأول. حسب الشكل التالي:

مثال

$a = 0.98$ نقرأ في العمود الأول العدد 0.9 ونقرأ في السطر الأول العدد 0.08 فيكون التقاطع بين العمود والسطر يمثل الاحتمال $P = 0.8365$ ، ونكتب: $P(Z \le 0.98) = 0.8365$ ، ومن اجل الحصول على جدول التوزيع الإحصائي لقانون الطبيعي المعياري انظر الملحق(2).



ت. خواص دالة التوزيع المتراكمة لتوزيع الطبيعي المعياري

- على اعتبار أن دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع الطبيعي القياسي متناظرة بالنسبة للمتوسط 0 أي أنها دالة زوجية، ولذلك جدول التوزيع الإحصائي لا توجد فيه القيم السالبة للمتغير العشوائي فإذا كان عدد سالب نستخدم الخاصية التالية: $\Psi_Z(-a) = 1 - \Psi_Z(a)$

مثال

$$P(Z \le -0.1) = \Psi_Z(-0.1) = 1 - \Psi_Z(0.1) = 1 - 0.5395 = 0.4605$$

- حساب احتمال Z ضمن مجال:

$$P(a \le Z \le b) = P(Z \le b) - P(Z \le a) = \Psi_Z(b) - \Psi_Z(a)$$

مثال

$$P(0 \le Z \le 0.1) = P(Z \le 0.1) - P(Z \le 0) = \Psi_Z(0.1) - \Psi_Z(0) = 0.5395 - 0.5 = 0.0395$$

- استخدام الاحتمال العكسي في حساب احتمال Z :

$$P(Z \ge a) = 1 - P(Z \le a) = 1 - \Psi_Z(a)$$

مثال

$$P(Z \ge 2.53) = 1 - P(Z \le 2.53) = 1 - \Psi_Z(2.53) = 1 - 0.9943 = 0.0057$$

- إذا كان: $X \to N(1800,300)$ ، احسب: $P(X \ge 2400)$

نعمل على تحويل التوزيع X إلى التوزيع المعياري Z :

$$P(X \ge 2400) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \ge \frac{2400-1800}{300}\right) = P(Z \ge 2) = 1 - P(Z \le 2)$$

$$P(X \ge 2400) = 1 - \Psi_Z(z) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

ث. بعض خصائص واستعمالات التوزيع الطبيعي

- تقريب قانون توزيع بواسون إلى قانون التوزيع الطبيعي:

ليكن X متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بمتوسط λ وانحراف معياري $\sqrt{\lambda}$ ، فإذا كان: $\lambda \ge 15$ فانه يمكن تقريب قانون توزيع بواسون إلى قانون التوزيع الطبيعي بنفس المتوسط λ ونفس الانحراف المعياري $\sqrt{\lambda}$ والهدف من هذا التقريب هو تبسيط الحسابات فقط.

مثال

إذا كان: $X \to P(50)$ ، احسب: $P(20 \le X \le 50)$

نلاحظ أن: $\lambda = 50 \succ 15$ وعليه يمكننا تقريب X من التوزيع الطبيعي ونكتب: $X \to N(\lambda;\sqrt{\lambda})$

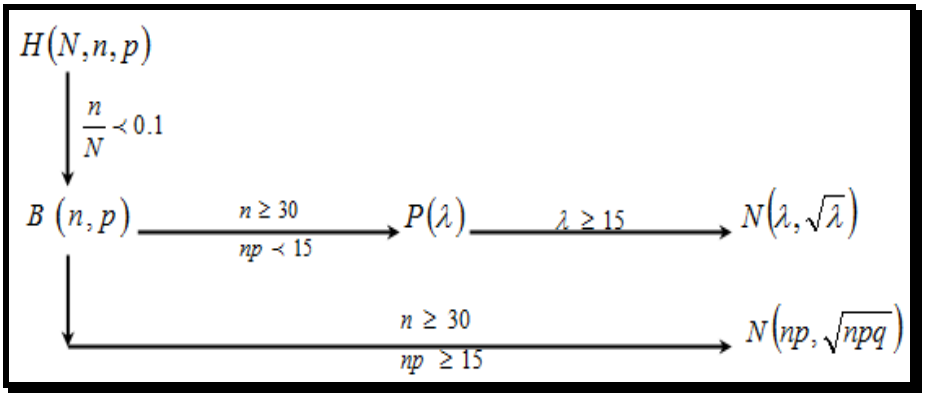
ولدينا: $E(X) = \lambda = 50, \sigma(X) = \sqrt{\lambda} = \sqrt{50} = 7.07$ يكون: $X \to N(50;7.07)$

باستعمال قانون التوزيع الطبيعي نجد أن:

$$P(20 \le X \le 50) = P(19.5 \le X \le 50.5) = P\left(\frac{19.5-50}{7.07} \le Z \le \frac{50.5-50}{7.07}\right) = P(-4.31 \le Z \le 0.07)$$

$$P(20 \le X \le 50) = \Psi_Z(0.07) - \Psi_Z(-4.31) = \Psi_Z(4.31) + \Psi_Z(0.07) - 1 = 05279 + 1 - 1 = 0.5279$$

ملخص قوانين التقريب:



- إذا كان: $X_1 \to N(\mu_1, \sigma_1)$ ، $X_2 \to N(\mu_2, \sigma_2)$ و X_1 مستقل عن X_2 يكون:

$$X_1 + X_2 \to N\left(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_1^2}\right) \quad ، \quad X_1 - X_2 \to N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_1^2}\right)$$

- إذا كان $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ سلسلة n متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع الطبيعي على النحو التالي: $X \to N(\mu, \sigma)$ ومستقلة مثنى مثنى، فان المتوسط الحسابي $\overline{X}$ يتبع نفس القانون وهو الطبيعي ولكن على النحو التالي: $\overline{X} \to N\left[E(\overline{X}); \sigma(\overline{X})\right]$

ويكون أمل المتوسطات هو:

$$E(\overline{X}) = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{n \times \mu}{n} = \mu$$

أما التباين للمتوسطات فهو:

$$V(\overline{X}) = V\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{n \times \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

ويكون الانحراف المعياري للمتوسطات:

$$\sigma(\overline{X}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ومنه يكون توزيع المتوسطات: $\overline{X} \to N\left(\mu \ ; \ \sigma/\sqrt{n}\right)$

I.2.2.4 قانون توزيع كي-التربيعي(The chi-square distribution)

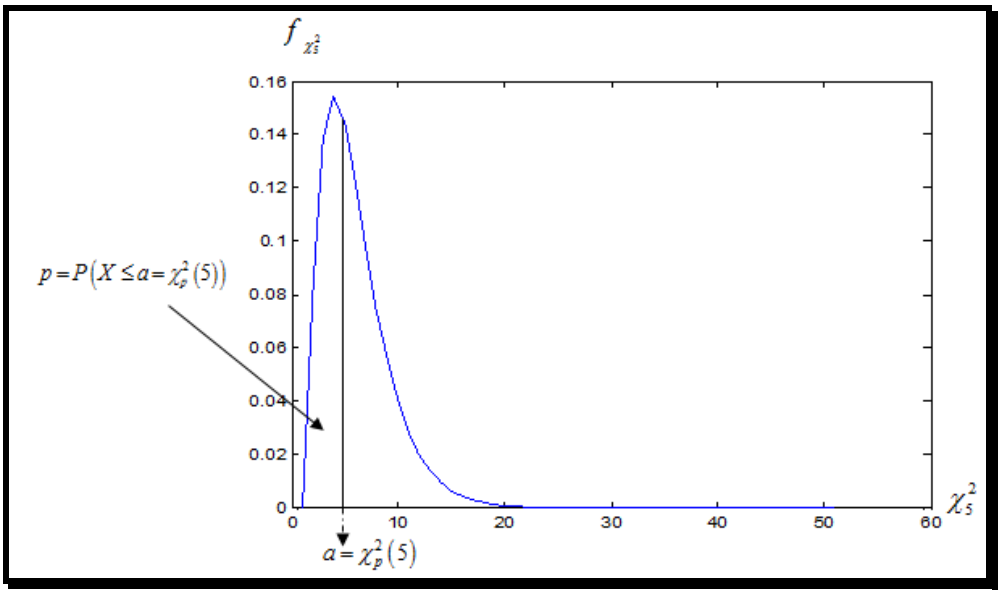
تعريف

إذا كانت: $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ سلسلة n متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع الطبيعي المعياري ومستقلة عن بعض مثنى مثنى، يكون:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \rightarrow \chi_n^2$$

ونقول عندئذ أن Y هو متغير عشوائي مستمر يتبع توزيع كي ألتربيعي بدرجة حرية n .

فمثلا من اجل $Y \rightarrow \chi_5^2$ يكون التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية لكي-ألتربيعي على النحو التالي:



ملاحظة

كلما ارتفعت قيمة درجة الحرية n يبتعد منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لكي-ألتربيعي عن المحور العمودي ويصبح أكثر جرسياً وهو بذلك يؤول إلى التوزيع الطبيعي.

أ. كيفية استخدام جدول التوزيع الإحصائي لكي-ألتربيعي

في العمود الأول نجد قيم n درجات الحرية فإذا اخترنا احد هذه القيم ثم بعد ذلك انتقلنا إلى داخل الجدول على نفس السطر الذي تم اختياره فإننا نجد قيم المتغير العشوائي χ_n^2 وعندئذ يمكننا أن نقرا في السطر الأول لهذا الجدول قيم الاحتمال P عند كل قيمة من قيم المتغير العشوائي، و P تمثل مساحة الحيز الواقعة على يسار قيمة المتغير العشوائي وتحت منحنى الكثافة. ونكتب:

$$P = P(X \le a) = \int_0^a f_X(x)dx$$

مثال

إذا كان: $Y \rightarrow \chi_{10}^2$ فمن اجل $P = 0.05$ نحسب قيمة المتغير العشوائي: $0.05 = P(X \le a)$

وباستعمال جدول التوزيع الإحصائي لكي-ألتربيعي ضمن الملحق(3) نجد أن:

$$0.05 = P(X \le a) \Rightarrow a = 3.94$$

أما إذا كانت قيمة المتغير العشوائي هي: $a = 9.34$ نحسب قسمة الاحتمال:

$$P = P(X \le 9.34) \Rightarrow P = 0.50$$

في بعض جداول التوزيعات الإحصائية تكون قيمة الاحتمال على يمين المتغير العشوائي لذلك يجب التوفيق بين الاحتمال المطلوب حسابه وجدول التوزيع الإحصائي أي أننا نستعمل الشكل: $P = P(X \geq \chi_n^2)$

ب. خصائص توزيع كي–ألتربيعي

ليكن المتغير العشوائي: $Y \to \chi_n^2$ يكون الأمل الرياضي والتباين هما:

- الأمل الرياضي: $E(Y) = n$
- التباين: $V(Y) = 2n$

I.3.2.4 قانون توزيع ستيودنت(Student distribution)

تعريف

ليكن المتغيران العشوائيان Z و Y والمستقلان عن بعض، حيث أن Z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري و Y يخضع لتوزيع كي التربيعي بدرجة حرية n ، ونكتب:

$$Y \to \chi_n^2 \quad \text{و} \quad Z \to N(0;1) \quad \text{و} \quad Z \perp Y$$

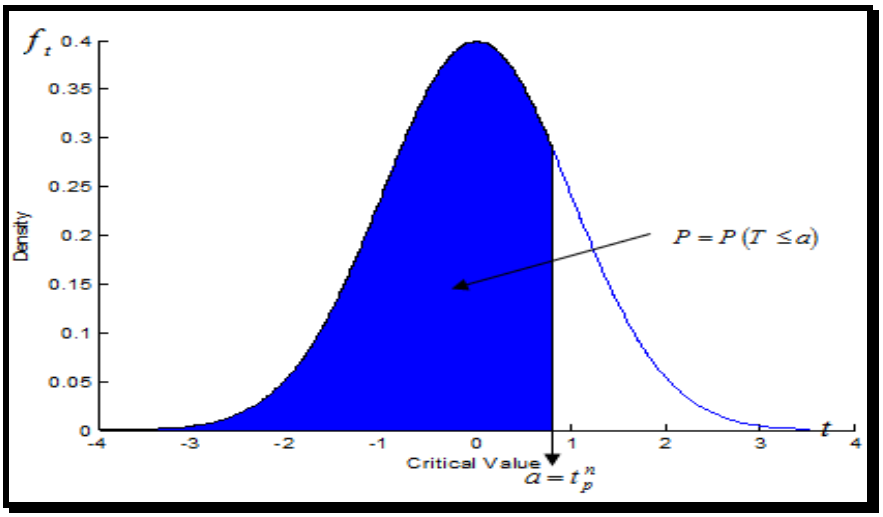
يكون:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/n}} \to t^n$$

ونقول عندئذ أن t^n هو متغير عشوائي مستمر يتبع توزيع ستيودنت بدرجة حرية n .

أ. كيفية استخدام جدول التوزيع الإحصائي لستيودنت

في العمود الأول نجد قيم n درجات الحرية فإذا اخترنا احد هذه القيم ثم بعد ذلك انتقلنا إلى داخل الجدول على نفس السطر الذي تم اختياره فإننا نجد قيم المتغير العشوائي t^n وعندئذ يمكننا أن نقرا في السطر الأول لهذا الجدول قيم الاحتمال P عند كل قيمة من قيم المتغير العشوائي، و P تمثل مساحة الحيز الواقعة على يسار قيمة المتغير العشوائي وتحت منحنى دالة الكثافة.



فإذا كان: $T \to t^n$ فإننا نكتب: $P = P(T \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f_T(t)dt$

أي أن P تمثل مساحة الحيز الواقعة علي يسار a والمحصور بين دالة الكثافة ومحور قيم المتغير العشوائي.

مثال

إذا كان $T \to t^{10}$ فانه عندما يأخذ المتغير العشوائي قيمة قدرها $a=0.260$ تكون قيمة الاحتمال هي $P=0.75$ (انظر الملحق (4)) ونكتب: $P=P(T\le a)\Rightarrow 0.75=P(T\le 0.700)$

ففي نفس المتغير العشوائي السابق $T \to t^{10}$ ، إذا كانت قيمة الاحتمال هي $P=0.95$ ما قيمة العدد a ؟

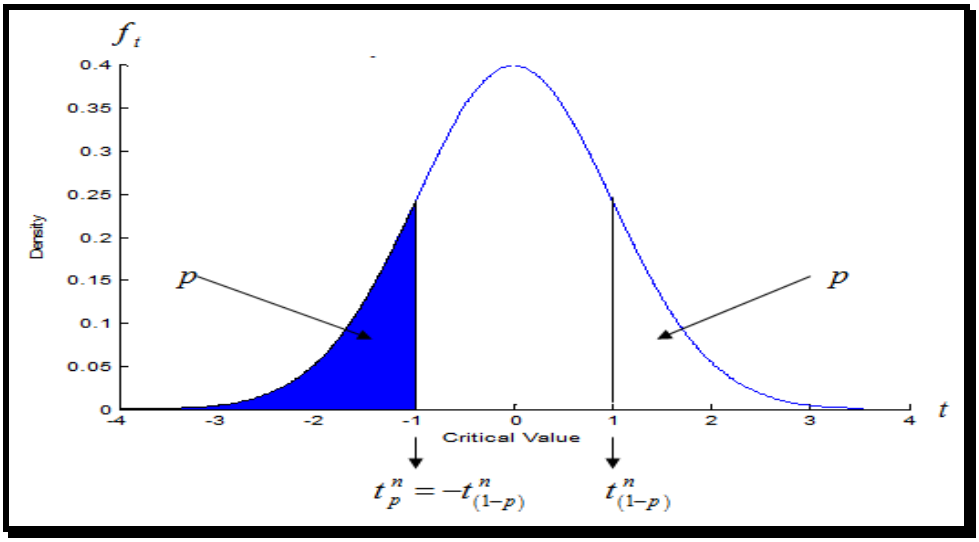
لدينا: $0.95=P(T\le a)$

فباستعمال جدول توزيع ستيودنت ضمن الملحق (4) نجد أن $a=1.812$ وهي عبارة عن القيمة التي يأخذها المتغير العشوائي T والتي تجعل من قيمة الاحتمال عندئذ هي $P=0.95$ وهي تعبر عن مساحة الحيز المحصور بين دالة الكثافة للمتغير العشوائي T ومحور الفواصل والواقعة علي يسار العدد 1.812 أي من $-\infty$ إلى 1.812 . ويمكننا أن نكتب كذلك: $a=t^{10}_{0.95}=1.812$.

وبصفة عامة نكتب: $a=t^n_P$ وتقرأ هذه العبارة على أنها القيمة التي يأخذها المتغير العشوائي T بدرجة حرية n وتجعل من الاحتمال الواقع على يسار a هو P .

ب. خصائص توزيع ستيودنت

- إذا كان: $T \to t^n$ و $n\ge 2$ يكون: $E(T)=0$ و $V(T)=n/(n-2)$ ؛
- على اعتبار أن دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ستيودنت متناظرة بالنسبة للمتوسط 0 أي أنها دالة زوجية، ولذلك جدول التوزيع الإحصائي لستيودنت لا توجد فيه القيم السالبة للمتغير العشوائي فإذا كان $P<0.5$ يكون a عدد سالب ومن اجل حسابه نستخدم الخاصية التالية: $a=t^n_P=t^n_{(1-P)}$ ؛



مثال

إذا كان: $T \to t^{15}$ اوجد قيمة العدد a حتى يكون: $t^{15}_{0.10}$ ، ثم واجد قيمة P من اجل: $t^{15}_p=-0.691$.

$t_{0.10}^{15}$: هي القيمة التي يأخذها المتغير العشوائي T بدرجة حرية 15 والتي تجعل من الاحتمال الواقع على يسار a هو 0.10، يكون: $P(T \le a) = 0.10$

لدينا الاحتمال اقل من 0.5 نستعمل الخاصية السابقة: $t_{0.10}^{15} = -t_{(1-0.10)}^{15} = -t_{0.90}^{15} = -1.341$

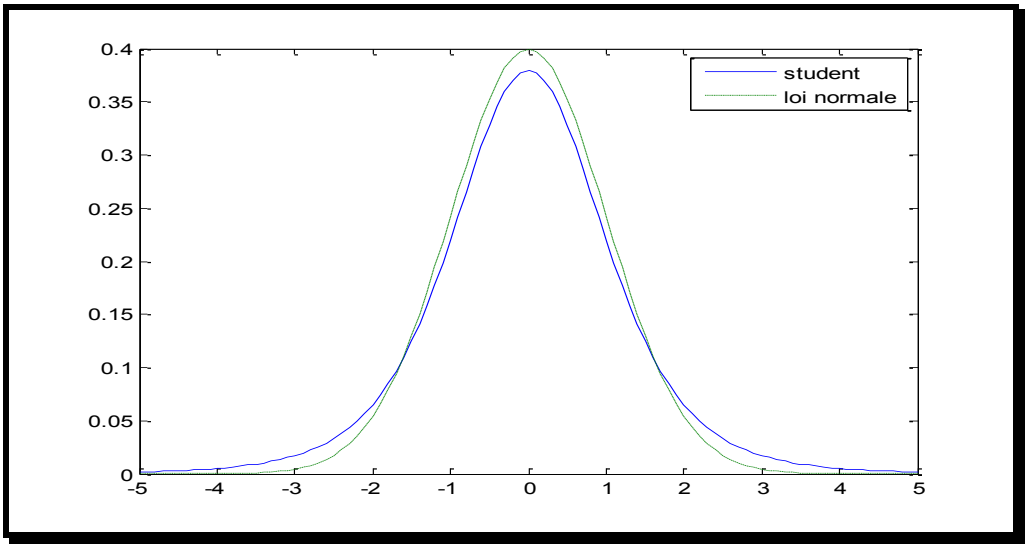
ونتيجة العدد $t_{0.10}^{15}$ سالبة و ذلك لان الاحتمال اقل من 0.5.

$t_p^{15} = -0.691$: نبحث عن قيمة الاحتمال P التي تجعل من العدد $a = -0.691$ ، نلاحظ أن إشارة العدد $t_p^{15} = -0.691$ سالبة أي أن قيمة الاحتمال P اقل من 0.5 و ذلك لان العدد t_p^{15} سالب، ونكتب:

$$P = P\left(T \le t_p^{15}\right) = P(T \le -0.691) = 1 - P(T \le 0.691) = 1 - 0.75 = 0.25$$

■ على أساس عبارة توزيع ستيودنت يمكننا القول أن منحنى دالة الكثافة لهذا التوزيع يأخذ شكلاً جرسياً ومتناظر بالنسبة للمتوسط $E(T) = 0$ أي انه مشابه لشكل الكثافة لتوزيع الطبيعي القياسي، غير انه عند المتوسط أي في الذروة يقع توزيع ستيودنت تحت توزيع الطبيعي المعياري أما عند أذيال التوزيع فيكون العكس أي توزيع ستيودنت فوق التوزيع الطبيعي مما يعني أن أذيال توزيع ستيودنت أكثر سمكاً وثخانة مقارنتاً بالتوزيع الطبيعي المعياري. وكلما ارتفعت درجة الحرية n يقترب منحنى دالة الكثافة لتوزيع ستيودنت من منحنى الكثافة لتوزيع الطبيعي القياسي وهذا عندما تؤول درجة الحرية إلى مالا نهاية، ونكتب:

$$\lim_{n \to +\infty} T \to N(0,1)$$



وعملياً يمكننا أن نستخدم جدول التوزيع الطبيعي القياسي بدل جدول توزيع ستيودنت إذا كان: $n \ge 30$.

I.4.2.4 قانون توزيع فيشر (Fisher distribution)

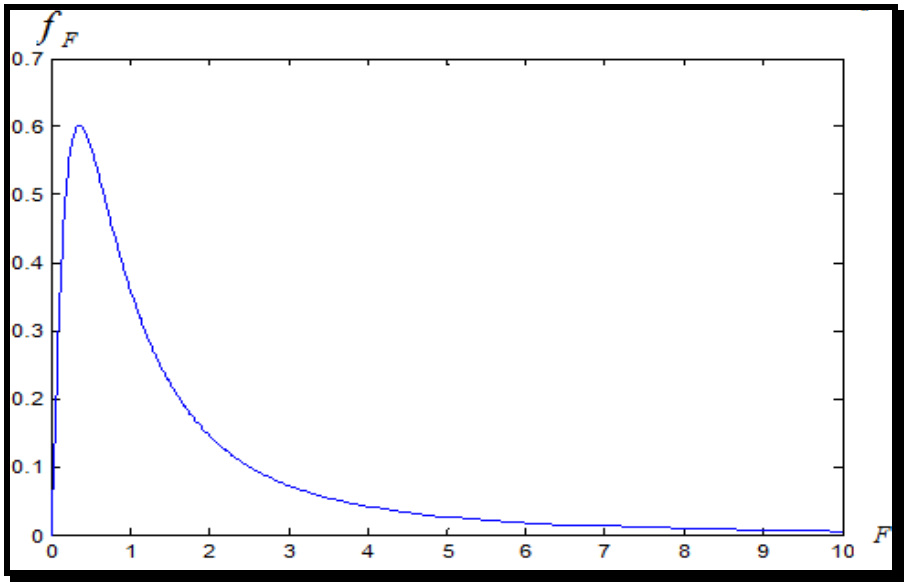
تعريف

ليكن المتغيران العشوائيان X_1 ، X_2 حيث أن: $X_1 \to \chi_{n_1}^2$ ، $X_1 \to \chi_{n_2}^2$ و X_1 مستقل عن X_2 $(X_1 \perp X_2)$ يكون:

$$F=\frac{X_1/n_1}{X_2/n_2}\to F(n_1,n_2)$$

ونقول عندئذ أن F متغير عشوائي مستمر يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية n_1 ، n_2 .

وعلى أساس عبارة توزيع فيشر يمكننا القول أن شكل منحنى دالة الكثافة لتوزيع فيشر يأخذ شكل توزيع كي ألتربيعي، فمن اجل: $F\to F(5;3)$ يكون شكل منحنى دالة الكثافة على النحو التالي:



كيفية استخدام جدول التوزيع الإحصائي لفيشر

في الجداول الإحصائية تتحدد قيمة الإحصائية $F_P(n_1,n_2)$ على أساس ثلاث معالم n_1 ، n_2 و p قيمة الاحتمال و المتمثلة في مساحة الحيز الواقع على يسار العدد $F_P(n_1,n_2)$ وتحت منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع فيشر. وعلى أساس انه توجد ثلاث معالم لتحديد قيمة الإحصائية $F_P(n_1,n_2)$ ، نجد لكل قيمة من قيم p جدول خاص بها، ولذلك فإننا نقرأ في أعلى الجدول قيمة الاحتمال p المراد الحصول عليه، ثم نحدد في السطر الأول لهذا الجدول قيمة درجة الحرية الأولى n_1 وفي العمود الأول درجة الحرية الثانية n_2 وعندئذ نجد قيمة الإحصائية $F_P(n_1,n_2)$ عند التقاطع بين n_1 و n_2 .

مثال(1)

إذا كان $F\to F(5;10)$ احسب a بحيث أن: $p(X\le a)=0.95$

نستعمل الجدول الذي أعلاه: $p=0.95$ فنجد أن: $a=3.33$ ، انظر الملحق(5) من اجل الحصول على جدول توزيع الإحصائي لفيشر. ويمكننا أن نكتب: $a=F_{0.95}(5;10)=3.33$.

ملاحظة:

$$F_P(n_1,n_2)=1/F_{(1-P)}(n_2,n_1)$$

مثال(1)

احسب: $F_{0.025}(16;15)$ ، $F_{0.05}(4;7)$ باستعمال الخاصية السابقة يمكن أن نكتب:

$$F_{0.01}(10,9)=\frac{1}{F_{(1-0.01)}(9,10)}=\frac{1}{F_{0.99}(9,10)}=\frac{1}{4.94}=0.202$$

$$F_{0.05}(4,7)=\frac{1}{F_{(1-0.05)}(7,4)}=\frac{1}{F_{0.95}(7,4)}=\frac{1}{6.09}=0.164$$

II. نظرية توزيع المعاينة(Theory of sampling distribution)

1.II مفاهيم إحصائية

1.1.II المجتمع الإحصائي

هو مجموعة من المفردات أو المشاهدات التي نرغب في دراستها وتحليل خصائصها، وهناك نوعين من المجتمعات الإحصائية:

- مجتمع إحصائي غير محدود؛
- مجتمع إحصائي محدود: و عادةً ما نرمز لحجمه بـ N .

ونسمي خصائص المجتمع الإحصائي (متوسط المجتمع μ وانحرافه المعياري σ ونسبة صفة ما في المجتمع P) بمعالم المجتمع الإحصائي.

2.1.II العينة

وهي مجموعة جزئية مأخوذة من المجتمع الإحصائي المراد بالدراسة، وعادةً ما نرمز لحجمها بـ n، ونسمي القيم المحسوبة من بيانات العينة(متوسط العينة $\overline{X}$ وانحرافها المعياري S ونسبة صفة ما في العينة r) بإحصائيات المعاينة. وعلى حسب طريقة المعاينة نميز الحالتين:

- **المعاينة النفاذية(Exhaustif sample):**

ويحدث هذا في حالة إذا كان المجتمع محدود والسحب بدون إرجاع.

- **المعاينة غير النفاذية(no exhaustif sample):**

ويكون ذلك في حالة السحب بالإرجاع أو أن يكون المجتمع غير محدود

2.II توزيع المعاينة للمتوسطات الحسابية

نفرض انه لدينا مجتمع إحصائي نرغب في دراسة متوسطه μ نقوم عندئذ بسحب عينة عشوائية حجمها n من هذا المجتمع ونحسب متوسطها الحسابي $\overline{X}_1$ ، ثم نسحب عينة عشوائية أخرى لها نفس الحجم n ونحسب متوسطها الحسابي $\overline{X}_2$ وهو ليس بالضروري مساوي لـ $\overline{X}_1$ ، فإذا كررنا هذه العملية عدة مرات يتشكل لدينا عدد كبير من المتوسطات الحسابية: $\left(\overline{X}_1\overline{X}_2,\overline{X}_3,\overline{X}_4.....\right)$ التي ليست بضرورة متساوية ونسمي هذا المجتمع بمجتمع المتوسطات الحسابية و يمكن النظر إليه كسلسلة متغير عشوائي(Processus aléatoire) يطلب تحديد توزيعه الاحتمالي.

أولاً: حالة العينات الكبرى

في هذه الحالة يتحدد توزيع المتوسطات الحسابية $\overline{X}_1\overline{X}_2,\overline{X}_3,\overline{X}_4$..... على أساس النظرية التالية:

نظرية النهايات المركزية: إذا كان لدينا مجتمع إحصائي مفرداته تتبع توزيع احتمالي متوسطه μ وانحرافه σ، وقمنا بسحب من هذا المجتمع عينات عشوائية حجمها n اكبر من 30 فان المتوسط الحسابي $\overline{X}$ للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، ونكتب: $\overline{X} \to N\left(E\left(\overline{X}\right),\sigma\left(\overline{X}\right)\right)$ ونميز الحالتين:

- حالة المعاينة غير النفاذية:

$$E\left(\overline{X}\right)=\mu \qquad ,\sigma\left(\overline{X}\right)=\sigma/\sqrt{n}$$

- حالة المعاينة النفاذية:

$$E\left(\overline{X}\right)=\mu \qquad ,\sigma\left(\overline{X}\right)=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

وتسمى النسبة: $\frac{N-n}{N-1}$ بمعامل الإرجاع. وهذه الملاحظة تخص كل الفروع الآتية في توزيعات المعاينة.

وعملياً يستخدم الإحصائيين عبارات المعاينة النفاذية عندما يكون: $n/N \geq 0.05$

ملاحظة:

إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع σ^2 مجهول نستعمل بدله $S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ الانحراف المعياري للعينة أو $\widehat{S}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ الانحراف المعياري المصحح للعينة وهذا الأخير أفضل إحصائياً في تقدير σ^2 كما سنرى ذلك لاحقاً في فصل التقدير. وهذه الملاحظة تخص كل الفروع الآتية في توزيعات المعاينة.

ثانياً: حالة العينات الصغرى

إذا كان حجم العينة اقل من 30 لا يمكننا تطبيق نظرية النهايات المركزية وبالتالي يكون توزيع المعاينة للمتوسط $\overline{X}$ يتحدد على أساس النظرية التالية:

نظرية:

إذا كان لدينا مجتمع إحصائي مفرداته تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسطه μ وانحراف σ، وقمنا بسحب من هذا المجتمع عينات عشوائية حجمها n اقل من 30 فان المتوسط الحسابي $\overline{X}$ للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، ونكتب: $\overline{X} \to N\left(E\left(\overline{X}\right),\sigma\left(\overline{X}\right)\right)$ وهذا إذا كان انحراف المجتمع σ معلوم؛ أما إذا كان انحراف المجتمع σ مجهول فانه لدينا:

$$\frac{\overline{X}-E(\overline{X})}{\sigma(\overline{X})}=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}.(\overline{X}-\mu)}{\sqrt{\sigma^2}}=\frac{\sqrt{n}.(\overline{X}-\mu)}{\sqrt{\hat{S}^2}}=\frac{\left(\frac{(\overline{X}-\mu)}{\sigma/\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2/(n-1)}}$$

ولدينا:

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma(\overline{X})}\to> N(0,1)$$

ولدينا كذلك:

$$\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\to N(0,1)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2\to\chi^2_{(n-1)}$$

أي أن:

$$\frac{\overline{X}-E(\overline{X})}{\sigma(\overline{X})}=\frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2_{(n-1)}/(n-1)}}\to t^{(n-1)}$$

ومنه نقول أن المتوسط الحسابي $\overline{X}$ للعينة يتوزع حسب قانون ستيودنت بدرجة حرية $(n-1)$

II.3 توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين $(\overline{X}_1-\overline{X}_2)$

في هذه الحالة نقترح مجتمعين إحصائيين 1 و 2 حيث أن الوحدات الإحصائية للمجتمعين مستقلة عن بعض، نسحب من المجتمع الأول عينة حجمها n_1 ومن المجتمع الثاني عينة حجمها n_2 ونرغب في دراسة توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين:$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)$. كما رأينا سابقاً فتكرار السحب من المجتمع الأول ومن المجتمع الثاني يولد مجتمع جديد يعرف بمجتمع المتوسطات التي ليست بالضرورة أن تكون متساوية مما يجعل من الفروق $(\overline{X}_1-\overline{X}_2)$ ليست متساوية أي أنها تشكل سلسلة متغير عشوائي يطلب تحديد قانون توزيعه الاحتمالي.

أولاً: حالة العينات الكبرى

المجتمع الأول: مفرداته تتبع توزيع إحصائي متوسطه μ_1 و انحرافه σ_1، وقمنا بسحب من هذا المجتمع عينات عشوائية حجمها n_1 اكبر من 30 فان المتوسط الحسابي $\overline{X}_1$ للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، ونكتب: $\overline{X}_1\to N(E(\overline{X}_1),\sigma(\overline{X}_1))$ وهذا على أساس نظرية النهايات المركزية.

المجتمع الثاني: مفرداته تتبع توزيع إحصائي متوسطه μ_2 وانحرافه σ_2، وقمنا بسحب من هذا المجتمع عينات عشوائية حجمها n_2 اكبر من 30 فان المتوسط الحسابي $\overline{X}_2$ للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، ونكتب: $\overline{X}_2\to N(E(\overline{X}_2),\sigma(\overline{X}_2))$ وهذا على أساس نظرية النهايات المركزية.

يكون توزيع المعاينة للفرق $(\overline{X}_1-\overline{X}_2)$ هو:

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)\to N(E(\overline{X}_1-\overline{X}_2),\sigma(\overline{X}_1-\overline{X}_2))$$

حيث أن:

$$E(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = E(\overline{X}_1) - E(\overline{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$$
$$\sigma^2(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \sigma^2(\overline{X}_1) + \sigma^2(\overline{X}_2) \qquad \overline{X}_1 \perp \overline{X}_2$$

ملاحظة:

يتم حساب $\sigma(\overline{X}_1)$ ، $\sigma(\overline{X}_2)$ على حسب هل المعاينة نفاذية أو غير نفاذية بالنسبة لكل مجتمع كما رئينا ذلك سابقاً.

ثانياً: حالة العينات الصغرى

المجتمع الأول: مفرداته تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ_1 وانحراف σ_1 ، وقمنا بسحب من هذا المجتمع عينات عشوائية حجمها n_1 اقل من 30 فان المتوسط الحسابي $\overline{X}_1$ للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، ونكتب: $\overline{X}_1 \to N(E(\overline{X}_1), \sigma(\overline{X}_1))$ وهذا إذا كان انحراف المجتمع σ_1 معلوم.

أما إذا كان انحراف المجتمع σ_1 مجهول فان المتوسط الحسابي $\overline{X}_1$ للعينة يتوزع حسب قانون ستيودنت بدرجة حرية $n_1 - 1$ ونكتب:

$$\frac{\overline{X}_1 - E(\overline{X}_1)}{\sigma(\overline{X}_1)} \to t^{(n_1-1)}$$

المجتمع الثاني: مفرداته تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ_2 وانحراف σ_2 ، وقمنا بسحب من هذا المجتمع عينات عشوائية حجمها n_2 اقل من 30 فان المتوسط الحسابي $\overline{X}_2$ للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، ونكتب: $\overline{X}_2 \to N(E(\overline{X}_2), \sigma(\overline{X}_2))$ وهذا إذا كان انحراف المجتمع σ_2 معلوم.

أما إذا كان انحراف المجتمع σ_2 مجهول فان المتوسط الحسابي $\overline{X}_2$ للعينة يتوزع حسب قانون ستيودنت بدرجة حرية $n_2 - 1$ ونكتب:

$$\frac{\overline{X}_2 - E(\overline{X}_2)}{\sigma(\overline{X}_2)} \to t^{(n_2-1)}$$

إذا كان σ_1 ، σ_2 معلومين يكون توزيع المعاينة للفرق $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ هو:

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \to N(E(\overline{X}_1 - \overline{X}_2), \sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2))$$

أما إذا كان σ_1 ، σ_2 مجهولين يكون توزيع المعاينة للفرق $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ هو توزيع ستيودنت بدرجة حرية $(n_1 + n_2 - 2)$ ، ونكتب:

$$\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-E(\overline{X}_1-\overline{X}_2)}{\sigma(\overline{X}_1-\overline{X}_2)} \rightarrow t^{(n_1+n_2-2)}$$

حيث أن:

$$E(\overline{X}_1-\overline{X}_2)=E(\overline{X}_1)-E(\overline{X}_2)=\mu_1-\mu_2$$
$$\sigma^2(\overline{X}_1-\overline{X}_2)=\sigma^2(\overline{X}_1)+\sigma^2(\overline{X}_2) \qquad \overline{X}_1 \perp \overline{X}_2$$

ملاحظة:

يتم حساب $\sigma(\overline{X}_1)$ ، $\sigma(\overline{X}_2)$ على حسب هل المعاينة نفاذية أو غير نفاذية بالنسبة لكل مجتمع كما رئينا ذلك سابقاً.

II.4 توزيع المعاينة لنسبة صفة ما r

إذا كانت نسبة صفة ما في المجتمع هي P (كنسبة التلف في إنتاج احد المصانع)، وسحبنا من هذا المجتمع عينة عشوائية حجمها n اكبر من 30 (أما إذا كان حجم العينة اقل من 30 فيجب أن تكون وحدات المجتمع الأصلي تتوزع طبيعياً)، فوجدنا أن نسبة هذه الصفة في العينة هي r . وعند تكرار هذه العملية عدة مرات نحصل على المجتمع $(r_1, r_2, r_3, ...)$ وندعوه بمجتمع النسب وهو عبارة عن سلسلة متغير عشوائي يطلب تحديد توزيعه الاحتمالي.

على حسب نظرية النهايات المركزية يكون توزيع مجتمع النسب $(r_1, r_2, r_3, ...)$ هو التوزيع الطبيعي، ونكتب:

$$r \rightarrow N(E(r), \sigma(r))$$

ونميز الحالتين:

- حالة المعاينة غير النفاذية:

$$E(r)=p \qquad ,\sigma(r)=\sqrt{\frac{P.(1-P)}{n}}$$

- حالة المعاينة النفاذية:

$$E(r)=p \qquad ,\sigma(r)=\sqrt{\frac{P.(1-P)}{n}}.\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

II.5 توزيع المعاينة للتباين S^2

إذا كان لدينا مجتمع إحصائي مفرداته تتبع توزيع احتمالي متوسطه μ وانحرافه المعياري σ ، وسحبنا من هذا المجتمع عينات عشوائية حجم كل منها هو n ونحسب في كل مرة تباين العينة S^2 ، فان تكرار عملية السحب يولد مجتمع للتباينات $(S_1^2, S_2^2, S_3^2, ...)$ وهي عبارة عن سلسلة متغير عشوائي يطلب تحديد قانون توزيعه الاحتمالي. يكون:

- القيمة المتوقعة للتباينات S^2 : نميز الحالتين التاليتين

✓ **حالة المعاينة غير النفاذية:**

$$E(S^2)=\sigma^2.\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

✓ **حالة المعاينة النفاذية:**

$$E(S^2)=\sigma^2.\left(\frac{n-1}{n}\right).\frac{N}{N-1}$$

- الانحراف المعياري للتباينات S^2 :

$$\sigma(S^2)=\begin{cases}\dfrac{\sigma^2}{n}\sqrt{2.(n-1)} & si \quad X\to N(\mu,\sigma)\\ \sqrt{\dfrac{\mu^4-\sigma^4}{n}} & si \quad Non\end{cases}$$

أما عن توزيع S^2 نميز الحالتين التاليتين:

- إذا كان: $n\geq 100$ فان: $S^2\to N\left(E(S^2),\sigma(S^2)\right)$
- إذا كان: $n\prec 100$ ووحدات المجتمع الأصلي تتبع التوزيع الطبيعي $X\to N(\mu,\sigma)$ فانه لدينا:

$$\frac{(n-1).\widehat{S}^2}{\sigma^2}=\frac{n.S^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}Z_i^{\,2}$$

أي انه مجموع مربعات توزيع طبيعي قياسي Z فهي تمثل توزيع كي ألتربيعي، ونكتب:

$$\frac{(n-1).\widehat{S}^2}{\sigma^2}=\frac{n.S^2}{\sigma^2}\to\chi^2_{(n-1)}$$

II.6 توزيع المعاينة لنسبة تباينين S_1^2/S_2^2

لدينا مجتمعان إحصائيان وحداتهما تتوزع طبيعياً ومستقلين عن بعض تبايناهما σ_1^2,σ_2^2 ، نسحب من المجتمعين عينتين عشوائيتين حجمهما على التوالي n_1,n_2 ونحسب S_1^2 تباين العينة المستخرجة من المجتمع الأول و S_2^2 تباين العينة المستخرجة من المجتمع الثاني، يكون توزيع المعاينة للتباينات في كلتي العينتين هو:

$$\frac{n_1.S_1^{\,2}}{\sigma_1^2}=\frac{(n_1-1).\widehat{S}_1^{\,2}}{\sigma_1^2}=\sum_{i=1}^{n_1}\left(\frac{X_{1i}-\overline{X}_1}{\sigma_1}\right)^2=\sum_{i=1}^{n_1}Z_{1i}^{\,2}\to\chi^2_{(n_1-1)}$$

$$\frac{n_2.S_2^{\,2}}{\sigma_2^2}=\frac{(n_2-1).\widehat{S}_2^{\,2}}{\sigma_2^2}=\sum_{i=1}^{n_1}\left(\frac{X_{2i}-\overline{X}_2}{\sigma_2}\right)^2=\sum_{i=1}^{n_1}Z_{2i}^{\,2}\to\chi^2_{(n_2-1)}$$

وعليه يكون توزيع النسبة:

$$F=\frac{\left(\frac{n_1.S_1^2}{\sigma_1^2}\right)\Big/(n_1-1)}{\left(\frac{n_2.S_2^2}{\sigma_2^2}\right)\Big/(n_2-1)}=\frac{\left(\frac{(n_1-1).\widehat{S}_1^2}{\sigma_1^2}\right)\Big/(n_1-1)}{\left(\frac{(n_2-1).\widehat{S}_2^2}{\sigma_2^2}\right)\Big/(n_2-1)}\rightarrow F(n_1-1,n_2-1)$$

أي أن نسبة التباينين تتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية $(n_1-1),(n_2-1)$

ملاحظة:

عموماً تعتبر معالم المجتمع الإحصائي (متوسط المجتمع μ وانحرافه المعياري σ ونسبة صفة ما في المجتمع P) ثوابت سواً كانت معلومة أو مجهولة، أما إحصائيات المعاينة(متوسط العينة $\overline{X}$ وانحرافها المعياري S ونسبة صفة ما في العينة r) فهي متغيرات عشوائية.

III. نظرية التقدير(Theory of estimation)

في اغلب الأحيان تكون معالم المجتمع مجهولة ونرغب في تقديرها، فنظرية التقدير تهتم بإيجاد مقرات لمعالم المجتمع انطلاقاً من النتائج المتحصل عليها من عملية المعاينة، إذ انه على حسب نظرية التقدير يمكننا الاستدلال بإحصائيات توزيع المعاينة(متوسط العينة $\overline{X}$ وانحرافها المعياري S ونسبة صفة ما في العينة r) في عملية تقدير المعالم المناظرة لها في المجتمع الإحصائي(متوسط المجتمع μ وانحرافه المعياري σ ونسبة صفة ما في المجتمع P) على التوالي. لكن الإشكالية المطروحة هنا هل يمكن القول بأن الإحصائية المحسوبة تمثل تقدير جيد للمعلمة المناظرة لها في المجتمع ؟

III.1 خصائص المقدر: ليكن $\widehat{\beta}$ مقدر β

III.1.1 خاصية عدم التحيز:

نقول عن $\widehat{\beta}$ انه مقدر غير متحيز لـ β إذا و فقط إذا كان: $E(\widehat{\beta})=\beta$ ونكتب:

$$\hat{\beta} \quad E.S.B.\ de \quad \beta$$

مثال:

هل يمكن القول أن $\overline{X}$ متوسط العينة مقدر غير متحيز لمتوسط المجتمع μ ؟

كما رئينا سابقاً فان $E(\overline{X})=\mu$ في حالة المعاينة النفاذية وغير النفاذية، وعليه فان $\overline{X}$ متوسط العينة مقدر غير متحيز لمتوسط المجتمع μ ، ونكتب:

$$\overline{X} \quad E.S.B.\ de \quad \mu$$

مثال آخر:

هل يمكننا اعتبار تباين العينة S^2 مقدر غير متحيز لتباين المجتمع σ^2 ؟

وجدنا في فرع توزيعات المعاينة للتباينات أن: $E(S^2)=\sigma^2.\frac{n-1}{n}$ أي أن: $E(S^2)\neq\sigma^2$

ومنه يمكننا القول أن S^2 مقدر متحيز لتباين المجتمع σ^2، ونكتب:

$$S^2 \quad E.B.\ de \quad \sigma^2$$

البحث عن مقدر غير متحيز لتباين المجتمع σ^2

لدينا:

$$E(S^2)=\sigma^2.\frac{n-1}{n}\Rightarrow\left(\frac{n}{n-1}\right).E(S^2)=\sigma^2\Rightarrow E\left(\frac{n}{n-1}.S^2\right)=\sigma^2$$

نضع:

$$\widehat{S}^2=\frac{n}{n-1}.S^2\Rightarrow\widehat{S}^2=\frac{n}{n-1}.\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

يكون: $E(\widehat{S}^2)=\sigma^2$

ومنه يمكننا القول أن $\hat{S}^2$ مقدر غير متحيز لتباين المجتمع σ^2، ونكتب:

$$\widehat{S}^2\ E.S.B.\ de \quad \sigma^2$$

ونسمى $\widehat{S}^2$ بتباين العينة المصحح، ويستعمل الإحصائيين $\widehat{S}^2$ بدل S^2 في تقدير تباين المجتمع σ^2 وذلك لأن الأول غير متحيز والثاني متحيز.

2.1.III خاصية الكفاءة أو الفعالية

ليكن: $\widehat{\beta}_1,\widehat{\beta}_2,\widehat{\beta}_3,.....\widehat{\beta}_m$ m مقدر غير متحيز لـ β أي أن: $\forall i=\overline{1,m}: E(\widehat{\beta}_i)=\beta$

نقول عن $\widehat{\beta}_k$ انه مقدر كفؤ أو فعال(**Efficient estimator**) لـ β إذا وفقط إذا كان:

$$\forall i=\overline{1,m}: V(\widehat{\beta}_k)\leq V(\widehat{\beta}_i)$$

مثال:

إذا كان متوسط العينة $\overline{X}$ والوسيط med مقدران غير متحيزان لمتوسط المجتمع μ،

ونكتب: $E(\overline{X})=E(med)=\mu$ فأيهما أكثر كفاءة في تقدير متوسط المجتمع μ، لدينا:

$$V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}\prec V(med)=\frac{\pi.\sigma^2}{2.n}$$

وعليه يمكننا القول أن متوسط العينة $\overline{X}$ هو الأكثر كفاءة أو فعالية في تقدير متوسط المجتمع μ.

3.1.III خاصية التقارب

نقول عن المقدر $\widehat{\beta}$ انه متقارب(**Convergent Estimator**) إذا كان يؤول إلى قيمة المعلمة β عندما يؤول حجم العينة n إلى ما لانهاية، ونكتب:

$$E(\hat{\beta}) = \beta \quad \wedge \quad \lim_{n\to+\infty}(V(\hat{\beta})) = 0$$

مثال:

هل يمكننا اعتبار متوسط العينة $\overline{X}$ مقدر متقارب لمتوسط المجتمع μ ؟. لدينا:

$$E(\overline{X}) = \mu \quad \wedge \quad \lim_{n\to+\infty}(V(\overline{X})) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sigma^2}{n}\right) = 0$$

وعليه يمكننا القول أن متوسط العينة $\overline{X}$ متقارب(**Convergent Estimator**) في تقدير متوسط المجتمع μ .

من خلال الأمثلة السابقة يمكننا القول أن متوسط العينة $\overline{X}$ هو مقدر غير متحيز ، كفؤ ومتقارب في تقدير متوسط المجتمع μ ، أي انه الأفضل.

III.2 التقدير النقطي (The point estimation)

إذا استعملنا قيمة واحدة في تقدير معلمة من معالم المجتمع نقول عندئذ عن هذا التقدير انه تقدير نقطي. فمثلا يمكننا استخدام الإحصائية $\overline{X}$ متوسط العينة كمقدر لمتوسط المجتمع μ وهو تقدير نقطي. أو استعمال $\hat{S}^2$ تباين العينة المصحح في تقدير تباين المجتمع وهو تقدير نقطي.

III.3 التقدير بالمجال(Confidence interval estimation)

III.3.1 تقدير متوسط المجتمع

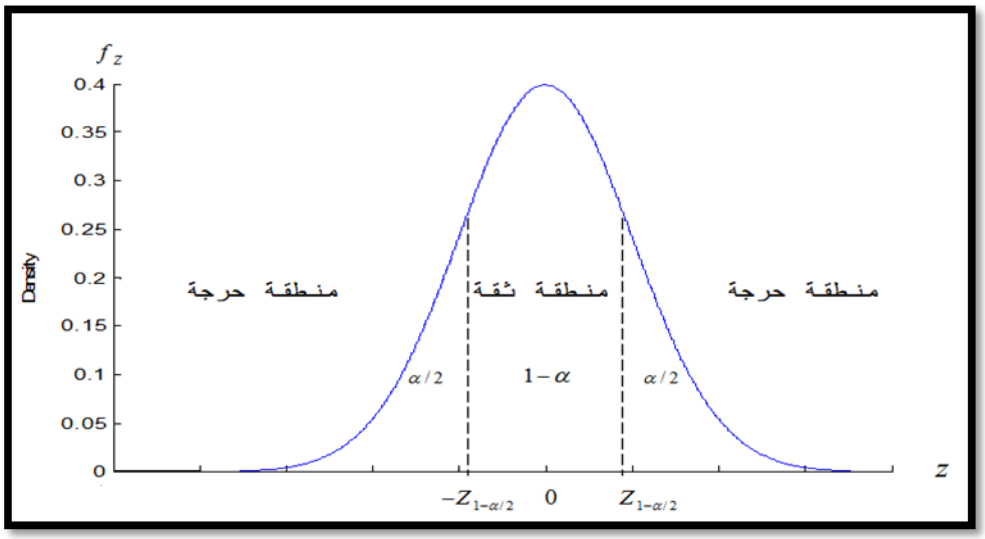
أولاً: حالة العينات الكبيرة

من خلال نتائج الفصل السابق تحصلنا على توزيع المعاينة للمتوسط $\overline{X}$: $\overline{X} \to N(E(\overline{X}), \sigma(\overline{X}))$

ويمكن أن نكتب: $Z = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma(\overline{X})} \to N(0,1)$ متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي القياسي.

ينتج عن عملية المعاينة قيم مختلفة للإحصائيات المعاينة مما يترتب عليه وجود فرق بين القيمة الحقيقية للمعلمة (مثلاً μ) وقيمة المقدرة (مثلاً $\overline{X}$)، ونسمى هذا الفرق باحتمال خطأ التقدير أو مستوى المعنوية ونرمز له بالرمز α ، فإذا كان احتمال الخطأ في التقدير هو α فان الاحتمال العكسي $(1-\alpha)$ يعبر عن درجة أو مستوى الثقة وهو يمثل احتمال أن تكون المعلمة تنتمي إلى مجال التقدير. ونرمز لحدود هذا المجال بـ Z_C والتي تسمى بالقيم الحرجة. و يمكن أن نكتب:

$$-Z_C \le Z \le Z_C \Rightarrow -Z_C \le \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma(\overline{X})} \le Z_C \Rightarrow P\left[-Z_{1-\alpha/2} \le \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma(\overline{X})} \le Z_{1-\alpha/2}\right] = 1-\alpha$$



في العبارة السابقة تم استبدال القيم الحرجة Z_C بالقيمة $Z_{1-\alpha/2}$ وهي قيمة المتغير العشوائي الطبيعي القياسي التي تعطي الاحتمال الواقع على اليسار و هو $(1-\alpha/2=1-\alpha+\alpha/2)$، وعلى أساس أن دالة التوزيع الطبيعي دالة زوجية يكون: $-Z_C=-Z_{1-\alpha/2}$. أما عن الاحتمال P فهو يساوي $1-\alpha$ فهو يعبر عن مستوى الثقة أي أن تكون المعلمة تنتمي إلى مجال التقدير. و يمكننا أن نكتب كذلك:

$$P\left[\overline{X}-Z_{1-\alpha/2}\sigma(\overline{X})\le\mu\le\overline{X}+Z_{1-\alpha/2}\sigma(\overline{X})\right]=1-\alpha$$

وعليه يكون مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ هو:

$$\mu\in\left[\overline{X}-Z_{1-\alpha/2}\sigma(\overline{X}),\ \ \overline{X}+Z_{1-\alpha/2}\sigma(\overline{X})\right]$$

وهذا بمستوى ثقة $(1-\alpha)$

جدول القيم الحرجة Z_C:

مستوى المعنوية α	0.01	0.02	0.05	0.10	0.20	0.50
مستوى الثقة $1-\alpha$	0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.50
$1-\alpha/2$	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.75
$Z_{1-\alpha/2}$	2.58	2.33	1.96	1.64	1.28	0.674

فمثلاً من اجل تحديد قيمة $Z_{0.995}$ الموافقة لـ $\alpha=0.01$

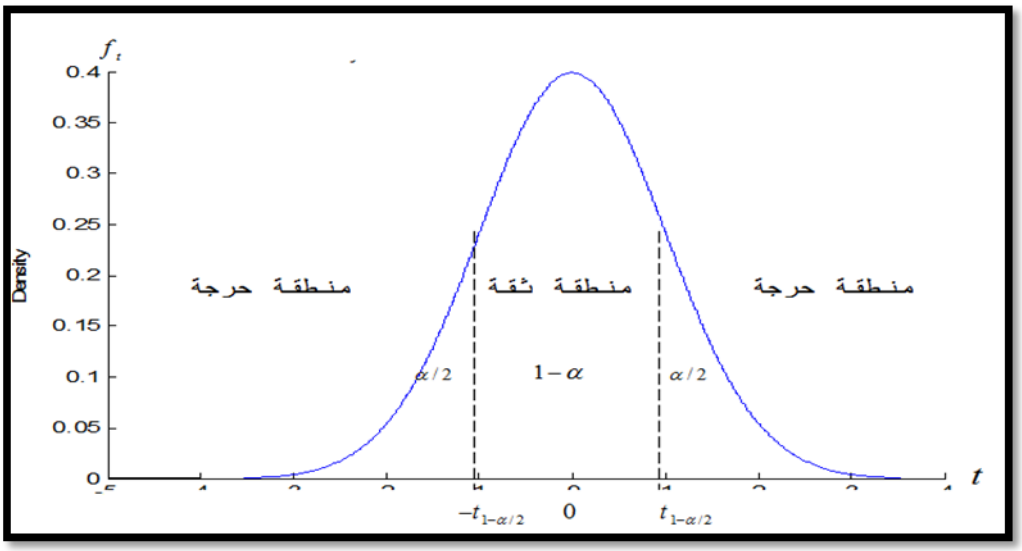
لدينا: $P(Z\le Z_{0.995})=0.995$ ففي الجدول توزيع الطبيعي القياسي نجد أن: $Z_{0.995}=2.58$

ثانياً: حالة العينات الصغرى

من خلال نتائج الفصل السابق تحصلنا على توزيع المعاينة للمتوسط $\overline{X}$ في حالة العينات الصغيرة كتالي:

$$T=\frac{\overline{X}-E(\overline{X})}{\sigma(\overline{X})}\rightarrow t^{(n-1)}$$

فبمستوى ثقة $(1-\alpha)$ نجد أن:



وبنفس طريقة التحليل السابقة:

$$-t_C \le T \le t_C \Rightarrow -t_C \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma(\bar{X})} \le t_C \Rightarrow P\left[-t_{1-\alpha/2}^{n-1} \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma(\bar{X})} \le t_{1-\alpha/2}^{n-1}\right] = 1-\alpha$$

في العبارة أعلاه تم استبدال القيم الحرجة t_C بالقيمة $t_{1-\alpha/2}$ وهي قيمة المتغير العشوائي لتوزيع ستيودنت التي تعطي الاحتمال الواقع على اليسار وهو $(1-\alpha/2 = 1-\alpha+\alpha/2)$، وعلى أساس أن دالة التوزيع لستيودنت دالة زوجية يكون: $-t_C = -t_{1-\alpha/2}$. أما عن الاحتمال P فهو يساوي $1-\alpha$ وهو يعبر عن مستوي الثقة أي أن تكون المعلمة تنتمي إلى مجال التقدير.

يمكننا أن نكتب كذلك:

$$P\left[\bar{X} - t_{1-\alpha/2}^{n-1}\sigma(\bar{X}) \le \mu \le \bar{X} + t_{1-\alpha/2}^{n-1}\sigma(\bar{X})\right] = 1-\alpha$$

وعليه يكون مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ هو:

$$\mu \in \left[\bar{X} - t_{1-\alpha/2}^{n-1}\sigma(\bar{X}),\ \ \bar{X} + t_{1-\alpha/2}^{n-1}\sigma(\bar{X})\right]$$

وهذا بمستوى ثقة $(1-\alpha)$

III.2.3 تقدير الفرق بين متوسطين

أولا: حالة العينات الكبيرة

من خلال نتائج الفصل السابق تحصلنا على توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \to N\left(E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2), \sigma(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)\right)$$

ويمكن أن نكتب:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} \to N(0,1)$$

فبمستوى ثقة $(1-\alpha)$ و بنفس الخطوات السابقة نجد أن:

$$-Z_C \le Z \le Z_C \Rightarrow -Z_C \le \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)} \le Z_C$$

$$\Rightarrow P\left[-Z_{1-\alpha/2} \le \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)} \le Z_{1-\alpha/2}\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)- Z_{1-\alpha/2}\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \le \mu_1 - \mu_2 \le (\overline{X}_1 - \overline{X}_2)+ Z_{1-\alpha/2}\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)\right] = 1-\alpha$$

وعليه يكون مجال الثقة للفرق $(\mu_1 - \mu_2)$ هو:

$$(\mu_1 - \mu_2) \in \left[(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)- Z_{1-\alpha/2}\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2),\ (\overline{X}_1 - \overline{X}_2)+ Z_{1-\alpha/2}\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)\right]$$

وهذا بمستوى ثقة $(1-\alpha)$

ملاحظة:

إذا أردنا تقدير الفرق: $(\mu_2 - \mu_1)$ فهو:

$$(\mu_2 - \mu_1) \in \left[(\overline{X}_2 - \overline{X}_1)- Z_{1-\alpha/2}\sigma(\overline{X}_2 - \overline{X}_1),\ (\overline{X}_2 - \overline{X}_1)+ Z_{1-\alpha/2}\sigma(\overline{X}_2 - \overline{X}_1)\right]$$

وهذا بمستوى ثقة $(1-\alpha)$

ثانياً: حالة العينات الصغرى

من خلال نتائج الفصل السابق تحصلنا على توزيع المعاينة لفرق بين متوسطين $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ في حالة العينات الصغرى كالتالي:

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)} \to t^{(n_1+n_2-2)}$$ مع (σ_1, σ_2) مجهولين فبمستوى ثقة $(1-\alpha)$ وبنفس طريقة التحليل السابقة نجد أن:

$$-t_C \le T \le t_C \Rightarrow -t_C \le \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)} \le t_C$$

$$\Rightarrow P\left[-t_{1-\alpha/2}^{n_1+n_2-2} \le \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)} \le t_{1-\alpha/2}^{n_1+n_2-2}\right] = 1-\alpha$$

وعليه يكون مجال الثقة للفرق $(\mu_1 - \mu_2)$ هو:

$$(\mu_1 - \mu_2) \in \left[(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)- t_{1-\alpha/2}^{(n_1+n_2-2)}\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2),\ (\overline{X}_1 - \overline{X}_2)+ t_{1-\alpha/2}^{(n_1+n\ -2)}\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)\right]$$

وهذا بمستوى ثقة $(1-\alpha)$

III.3.3 تقدير نسبة صفة ما في المجتمع P

من خلال نتائج الفصل السابق لتوزيع المعاينة للنسب تحصلنا على توزيع المعاينة للنسبة r :

$$r \to N\left(E(r),\sigma(r)\right) \Rightarrow Z = \frac{r-P}{\sigma(r)} \to N(0,1)$$

ويمكن أن نكتب:

$$-Z_C \le Z \le Z_C \Rightarrow -Z_C \le \frac{r-P}{\sigma(r)} \le Z_C$$

وبمستوى ثقة $(1-\alpha)$ ينتج أن:

$$P\left[-Z_{1-\alpha/2} \le \frac{r-P}{\sigma(r)} \le Z_{1-\alpha/2}\right] = 1-\alpha$$

ويمكننا أن نكتب كذلك:

$$P\left[r - Z_{1-\alpha/2}\sigma(r) \le \mu \le r + Z_{1-\alpha/2}\sigma(r)\right] = 1-\alpha$$

وعليه يكون مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ هو:

$$\mu \in \left[r - Z_{1-\alpha/2}\sigma(r),\ \ r + Z_{1-\alpha/2}\sigma(r)\right]$$

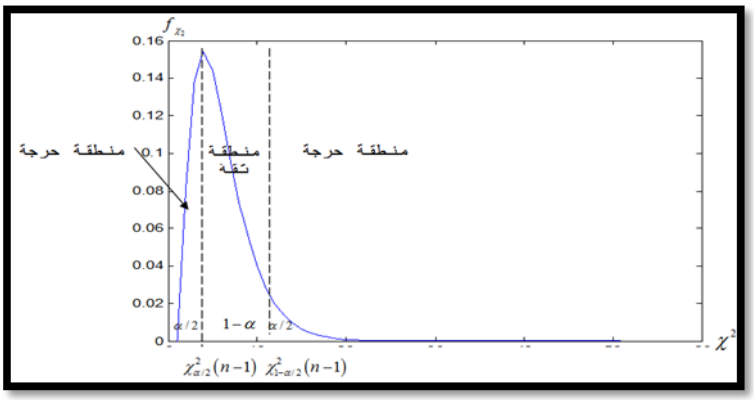
وهذا بمستوى ثقة $(1-\alpha)$

III.3.4 تقدير تباين المجتمع σ^2

من خلال نتائج الفصل السابق لتوزيع المعاينة للتباينات تحصلنا على توزيع المعاينة للتباين S^2 والتباين المصحح $\widehat{S}^2$ على الشكل التالي:

$$\frac{(n-1).\widehat{S}^2}{\sigma^2} = \frac{n.S^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{(n-1)}$$

فبمستوى ثقة $(1-\alpha)$ يكون:



ونكتب:

$$P\left[\chi^2_{\alpha/2}(n-1) \le \frac{(n-1).\hat{S}^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{(1-\alpha/2)}(n-1)\right] = 1-\alpha \Rightarrow P\left[\frac{(n-1).\hat{S}^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2)}(n-1)} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1).\hat{S}^2}{\chi^2_{(\alpha/2)}(n-1)}\right] = 1-\alpha$$

ومنه يكون مجال الثقة لتباين المجتمع σ^2 هو:

$$\sigma^2 \in \left[\frac{(n-1).\hat{S}^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2)}(n-1)} \ , \ \frac{(n-1).\hat{S}^2}{\chi^2_{(\alpha/2)}(n-1)}\right]$$

وهذا بمستوى ثقة $(1-\alpha)$.

III.5.3 تقدير نسبة تباينين $\left(\sigma_1^2 / \sigma_2^2\right)$

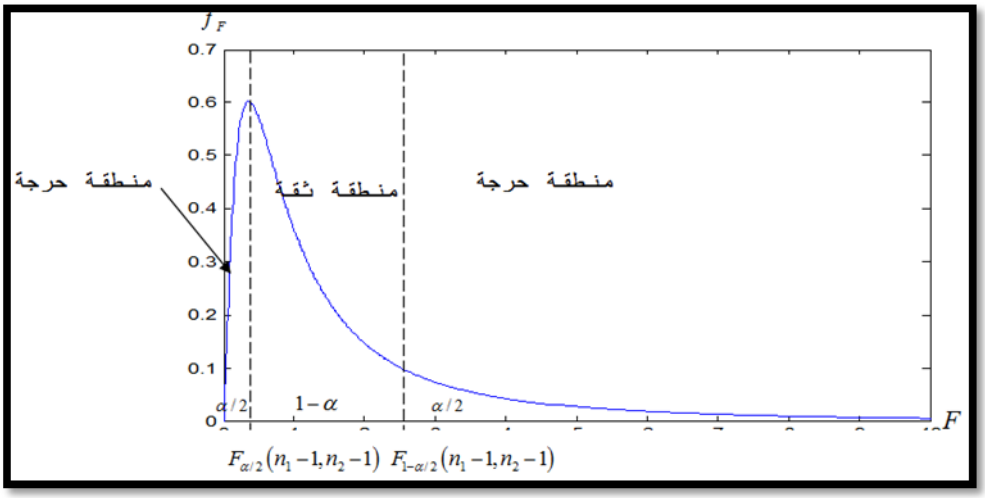
من خلال نتائج الفصل السابق لتوزيع المعاينة لنسبة تباينين $\left(S_1^2 / S_2^2\right)$ تحصلنا على توزيع المعاينة على الشكل التالي:

$$F = \frac{\left(\frac{n_1.S_1^2}{\sigma_1^2}\right) \Big/ (n_1-1)}{\left(\frac{n_2.S_2^2}{\sigma_2^2}\right) \Big/ (n_2-1)} = \frac{\left(\frac{(n_1-1).\hat{S}_1^2}{\sigma_1^2}\right) \Big/ (n_1-1)}{\left(\frac{(n_2-1).\hat{S}_2^2}{\sigma_2^2}\right) \Big/ (n_2-1)} \rightarrow F(n_1-1, n_2-1)$$

ويمكن أن نكتب كذلك:

$$F = \frac{\left(\frac{(n_1-1).\hat{S}_1^2}{\sigma_1^2}\right) \Big/ (n_1-1)}{\left(\frac{(n_2-1).\hat{S}_2^2}{\sigma_2^2}\right) \Big/ (n_2-1)} = \frac{\hat{S}_1^2 / \sigma_1^2}{\hat{S}_2^2 / \sigma_2^2} \rightarrow F(n_1-1, n_2-1)$$

فبمستوى ثقة $(1-\alpha)$ يكون:



ويكون:

$$P\left[F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\le \frac{\widehat{S}_1^2/\sigma_1^2}{\widehat{S}_2^2/\sigma_2^2}\le F_{(1-\alpha/2)}(n_1-1,n_2-1)\right]=1-\alpha$$

أي أن:

$$P\left[\frac{\widehat{S}_1^2/\widehat{S}_2^2}{F_{(1-\alpha/2)}(n_1-1,n_2-1)}\le \sigma_1^2/\sigma_2^2\le \frac{\widehat{S}_1^2/\widehat{S}_2^2}{F_{(\alpha/2)}(n_1-1,n_2-1)}\right]=1-\alpha$$

ومنه يكون مجال الثقة لتباين المجتمع $\left(\sigma_1^2/\sigma_2^2\right)$ هو:

$$\left(\sigma_1^2/\sigma_2^2\right)\in\left[\frac{\widehat{S}_1^2/\widehat{S}_2^2}{F_{(1-\alpha/2)}(n_1-1,n_2-1)}\ ,\ \frac{\widehat{S}_1^2/\widehat{S}_2^2}{F_{(\alpha/2)}(n_1-1,n_2-1)}\right]$$

وهذا بمستوى ثقة $(1-\alpha)$.

IV. اختبار الفروض(Hypothesis test)

يحتاج الباحث أحيانا في مراحل دراسته إلى اختبار فرضية ما تتعلق بالمجتمع الإحصائي المراد بالدراسة، فمثلاً قد يدعي باحث ما أن نسبة الفقر في مدينة ما هي 10% ، فللتأكد من مدى صحة هذا الادعاء نختار عينة عشوائية من سكان هذه المدينة ونحسب نسبة الفقر في العينة و على سبيل المثال كانت النسبة هي 15% في العينة. والسؤال المطروح هنا هل الفرق بين النسبة في العينة وادعاء الباحث يعود إلى مجرد الصدفة أم أن ادعاء الباحث غير صحيح؟ فللوصول إلى إجابة لهذا السؤال يجب أن نختبر صحة الفرضية التالية: نسبة الفقر في المدينة هي 10%

وعلى العموم فان اختبار الفرضيات يكون عبر الخطوات التالية:

- **صياغة الفرضية المعدومة (الفرضية الصفرية) والفرضية البديلة:**

نفترض أن المعلمة المراد اختبارها في المجتمع الأصلي هي γ ونريد مقارنتها مع قيمة ثابتة هي b، نرمز للفرضية المعدومة (الفرضية الصفرية) بالرمز H_0 (Null hypothesis) وهي توافق الفرض المقترح للدراسة، ونرمز كذلك للفرضية البديلة بالرمز H_1 (Alternative hypothesis) وهي توافق الفرض العكسي للفرضية المعدومة.

وعلى حسب الفرض المقترح للدراسة يوجد ثلاث أنوع للاختبار:

اختبار ثنائي الطرف: ويحدث هذا في حالة إذا كنا نريد التحقق من أن المعلمة γ تساوي القيمة b، وتكون صياغة الاختبار على النحو التالي:

$$H_0 : \gamma = b \qquad \underline{vs} \qquad H_1 : \gamma \neq b \qquad (\gamma \prec b \quad \vee \quad \gamma \succ b)$$

✓ **اختبار أحادي الطرف من اليسار:** ويحدث هذا في حالة إذا كنا نريد التحقق من أن المعلمة γ اكبر أو تساوي القيمة b، وتكون صياغة الاختبار على النحو التالي:

$$H_0 : \gamma \geq b \qquad \underline{vs} \qquad H_1 : \gamma \prec b$$

✓ **اختبار أحادي الطرف من اليمين:** ويحدث هذا في حالة إذا كنا نريد التحقق من أن المعلمة γ اقل أو تساوي القيمة b، وتكون صياغة الاختبار على النحو التالي:

$$H_0 : \gamma \leq b \qquad \underline{vs} \qquad H_1 : \gamma \succ b$$

- **تحديد مستوى المعنوية أو الدلالة:**

ونرمز له بالرمز α وهو يعبر عن احتمال رفض الفرضية H_0 رغم أنها صحيحة، ونكتب:

$$\alpha = P(\text{Re } jeter \ H_0 / H_0 \ Vraie)$$

ويعبر α عن الخطأ من الدرجة الأولى، فيكون الخطأ من الدرجة الثانية هو:

$$1 - \beta = P(Accepter \ H_0 / H_0 \ fausse)$$

وهو يعبر عن احتمال قبول الفرضية H_0 رغم أنها خاطئة.

- **تحديد الإحصائية المحسوبة:**

وهي عبارة عن دليل إحصائي ينفي أو يثبت الفرضية H_0، ويتم تحديدها من بيانات إحصائية المعاينة.

- **وضع قاعدة القرار:**

نقارن هنا بين الإحصائية المحسوبة والإحصائية المجدولة والتي على أساسها يتم قبول أو رفض الفرضية H_0.

- **اتخاذ القرار:**

نرفض أو نقبل H_0 بمستوى معنوية محدد α.

IV.1 اختبار المتوسط

أولاً: حالة العينات الكبرى

✓ **اختبار ثنائي الطرف**

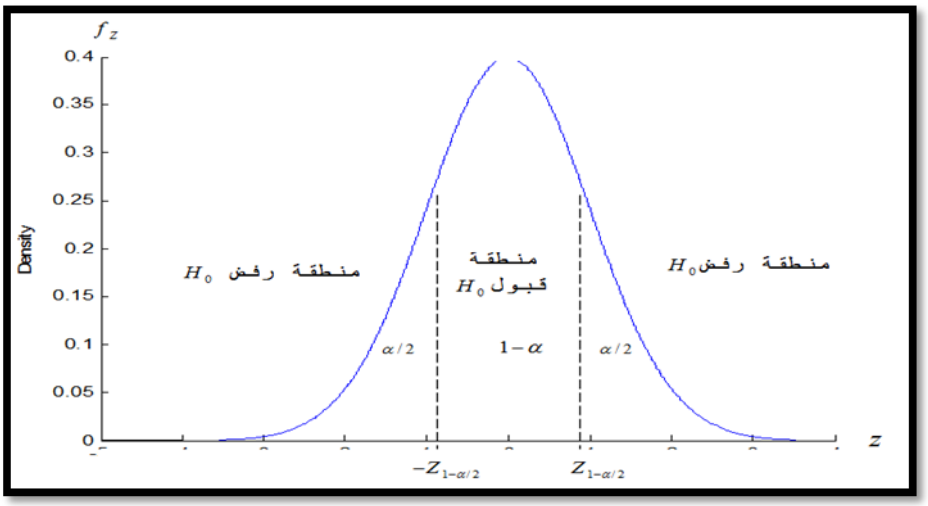
ليكن لدينا مجتمع إحصائي متوسطه μ وانحرافه σ، ونريد اختبار الفرضية التالية: هل المتوسط μ يساوي القيمة μ_0؟ هذه الحالة توافق اختبار ثنائي الطرف، وتكون صياغته على النحو التالي:

$$H_0: \ \mu = \mu_0 \qquad \underline{vs} \qquad H_1: \ \mu \neq \mu_0 \qquad \left(\mu \prec \mu_0 \quad \vee \quad \mu \succ \mu_0\right)$$

ومن اجل اختبار هذه الفرضية نأخذ عينة عشوائية حجمها $n \geq 30$ و نحسب متوسطها $\overline{X}$ فيكون توزيع المعاينة للمتوسط هو:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma(\overline{X})} \rightarrow N(0,1)$$

فبمستوى معنوية α يكون:



ونكتب:

$$P\left[-Z_{1-\alpha/2} \le \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma(\overline{X})} \le Z_{1-\alpha/2}\right] = 1-\alpha$$

نقوم بتثبيت سلسلة المتغير العشوائي $Z = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma(\overline{X})}$ عند الفرضية H_0 ، أي أننا نعتبرها صحيحة وعليه يكون $\mu = \mu_0$. وبتعويض في قيمة Z نجد أن:

$$Z_C = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma(\overline{X})}$$

نسمي Z_C بالإحصائية المحسوبة للاختبار.

قاعدة القرار:

إذا كان Z_C ينتمي إلى منطقة القبول نقبل H_0 بمستوى معنوية α ، أما إذا كان Z_C لا ينتمي إلى منطقة القبول نرفض H_0 ونقبل H_1 بمستوى معنوية α . ونكتب:

إذا كان: $Z_C \in \left]-Z_{(1-\alpha/2)} \ , \ Z_{(1-\alpha/2)}\right[$ نقبل H_0 بمستوى معنوية α ، ونقول عندئذ أن متوسط المجتمع يساوي القيمة μ_0 وهذا على ضوء هذه العينة و بمستوى معنوية α .

أما إذا كان: $Z_C \notin \left]-Z_{(1-\alpha/2)} \ , \ Z_{(1-\alpha/2)}\right[$ نرفض H_0 بمستوى معنوية α و نقبل H_1 ، ونقول عندئذ أن متوسط المجتمع لا يساوي القيمة μ_0 بل هو اقل أو اكبر منها $\left(\mu \prec \mu_0 \quad \vee \quad \mu \succ \mu_0\right)$ وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α .

ونسمي المجال $\left]-Z_{(1-\alpha/2)} \ , \ Z_{(1-\alpha/2)}\right[$ بالإحصائية المجدولة.

✓ اختبار أحادي الطرف من اليسار

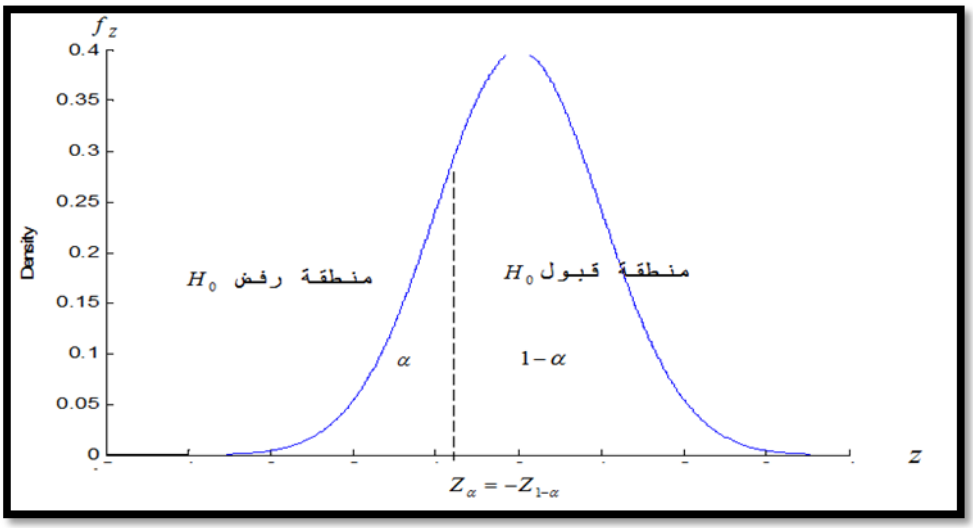
ليكن لدينا مجتمع إحصائي متوسطه μ وانحرافه σ ، ونريد اختبار الفرضية التالية: هل المتوسط μ اكبر أو يساوي القيمة μ_0 ؟ هذه الحالة توافق اختبار أحادي الطرف من اليسار، وتكون صياغته على النحو التالي:

$$H_0: \ \mu \geq \mu_0 \qquad \underline{vs} \qquad H_1: \ \mu \prec \mu_0$$

ومن اجل اختبار هذه الفرضية نأخذ عينة عشوائية حجمها $n \geq 30$ ونحسب متوسطها $\overline{X}$ فيكون توزيع المعاينة للمتوسط هو:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma(\overline{X})} \rightarrow N(0,1)$$

فبمستوى معنوية α يكون:



ونكتب:

$$P\left[\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma(\overline{X})} \geq Z_T = Z_\alpha\right] = 1 - \alpha$$

نسمي $Z_T = Z_\alpha = -Z_{(1-\alpha)}$ بالإحصائية المجدولة.

وبنفس الطريقة السابقة تكون قيمة الإحصائية المحسوبة للاختبار:

$$Z_C = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma(\overline{X})}$$

قاعدة القرار:

إذا كان: $Z_C \geq Z_T = -Z_{(1-\alpha)}$ نقبل H_0 بمستوى معنوية α ، ونقول عندئذ أن متوسط المجتمع اكبر أو يساوي القيمة μ_0 وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α .

أما اذا كان: $Z_C \prec Z_T = -Z_{(1-\alpha)}$ نرفض H_0 بمستوى معنوية α ونقبل H_1 ، ونقول عندئذ أن متوسط المجتمع اقل من القيمة μ_0 وهذا على ضوء هذه العينة و بمستوى معنوية α .

✓ **اختبار أحادي الطرف من اليمين**

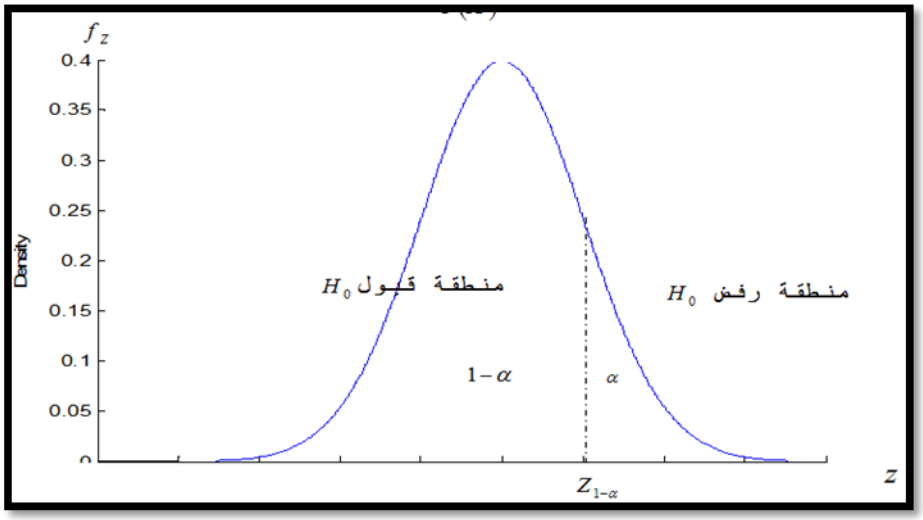
ليكن لدينا مجتمع إحصائي متوسطه μ وانحرافه σ ، ونريد اختبار الفرضية التالية: هل المتوسط μ اقل أو يساوي القيمة μ_0 ؟ هذه الحالة توافق اختبار أحادي الطرف من اليمين، و تكون صياغته على النحو التالي:

$$H_0 : \ \mu \leq \mu_0 \qquad \underline{vs} \qquad H_1 : \ \mu \succ \mu_0$$

ومن اجل اختبار هذه الفرضية نأخذ عينة عشوائية حجمها $n \geq 30$ ونحسب متوسطها $\overline{X}$ فيكون توزيع المعاينة للمتوسط هو:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma(\overline{X})} \rightarrow N(0,1)$$

فبمستوى معنوية α يكون:



ونكتب:

$$P\left[\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma(\overline{X})} \leq Z_T = Z_{(1-\alpha)}\right] = 1 - \alpha$$

نسمي $Z_T = Z_{(1-\alpha)}$ بالإحصائية المجدولة.

وبنفس الطريقة السابقة تكون قيمة الإحصائية المحسوبة للاختبار:

$$Z_C = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma(\overline{X})}$$

قاعدة القرار:

إذا كان: $Z_C \leq Z_T = Z_{(1-\alpha)}$ نقبل H_0 بمستوى معنوية α ، ونقول عندئذ أن متوسط المجتمع اقل أو يساوي القيمة μ_0 وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α .

أما أذا كان: $Z_C \succ Z_T = Z_{(1-\alpha)}$ نرفض H_0 بمستوى معنوية α ونقبل H_1 ، ونقول عندئذ أن متوسط المجتمع اكبر من القيمة μ_0 وهذا على ضوء هذه العينة و بمستوى معنوية α .

الجدول التالي يمثل الإحصائيات المحسوبة للاختبار في حالة العينات الكبرى

مستوى المعنوية α	0.10	0.05	0.01
اختبار ثنائي الطرف	$[-1.64,1.64]$	$[-1.96,1.96]$	$[-2.58,2.58]$
اختبار أحادي الطرف	1.28 أو -1.28	1.64 أو - 1.64	2.33 أو -2.33

ثانيا: حالة العينات الصغرى

✓ **اختبار ثنائي الطرف**

ليكن لدينا مجتمع إحصائي مفرداته تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسطه μ وانحراف σ مجهول، ونريد اختبار الفرضية التالية: هل المتوسط μ يساوي القيمة μ_0 ؟ هذه الحالة توافق اختبار ثنائي الطرف، وتكون صياغته على النحو التالي:

$$H_0: \ \mu = \mu_0 \qquad \underline{vs} \qquad H_1: \ \mu \neq \mu_0 \qquad (\mu \prec \mu_0 \quad \vee \quad \mu \succ \mu_0)$$

ومن اجل اختبار هذه الفرضية نأخذ عينة عشوائية حجمها $n \prec 30$ ونحسب متوسطها $\overline{X}$ فيكون توزيع المعاينة للمتوسط هو:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma(\overline{X})} \rightarrow t^{(n-1)}$$

فبمستوى معنوية α يكون:

$$P\left[-t^{(n-1)}_{(1-\alpha/2)} \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma(\overline{X})} \leq t^{(n-1)}_{(1-\alpha/2)}\right] = 1-\alpha$$

وبنفس الطريقة السابقة تكون قيمة الإحصائية المحسوبة للاختبار:

$$T_C = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma(\overline{X})}$$

قاعدة القرار:

إذا كان: $T_C \in \left]-t_{(1-\alpha/2)}^{(n-1)} \ , \ t_{(1-\alpha/2)}^{(n-1)}\right[$ نقبل H_0 بمستوى معنوية α، ونقول عندئذ أن متوسط المجتمع يساوي القيمة μ_0 وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

أما اذا كان: $T_C \notin \left]-t_{(1-\alpha/2)}^{(n-1)} \ , \ t_{(1-\alpha/2)}^{(n-1)}\right[$ نرفض H_0 بمستوى معنوية α و نقبل H_1، ونقول عندئذ أن متوسط المجتمع لا يساوي القيمة μ_0 بل هو اقل أو اكبر منها $\left(\mu \prec \mu_0 \quad \vee \quad \mu \succ \mu_0\right)$ وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

✓ **اختبار أحادي الطرف من اليسار**

ليكن لدينا مجتمع إحصائي مفرداته تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسطه μ وانحراف σ مجهول، ونريد اختبار الفرضية التالية: هل المتوسط μ اكبر أو يساوي القيمة μ_0؟ هذه الحالة توافق اختبار أحادي الطرف من اليسار:

$$H_0 : \ \mu \geq \mu_0 \qquad \underline{vs} \qquad H_1 : \ \mu \prec \mu_0$$

وبنفس الشروط السابقة يكون توزيع المعاينة للمتوسط هو:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma\left(\overline{X}\right)} \rightarrow t^{(n-1)}$$

فبمستوى معنوية α يكون:

$$P\left[\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma\left(\overline{X}\right)} \geq T_T = t_{\alpha}^{(n-1)}\right] = 1 - \alpha$$

نسمي $T_T = t_{\alpha}^{(n-1)} = -t_{(1-\alpha)}^{(n-1)}$ بالإحصائية المجدولة.

وتكون الإحصائية المحسوبة للاختبار هي:

$$T_C = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma\left(\overline{X}\right)}$$

قاعدة القرار:

إذا كان: $T_C \geq T_T = t_{\alpha}^{(n-1)} = -t_{(1-\alpha)}^{(n-1)}$ نقبل H_0 بمستوى معنوية α، ونقول عندئذ أن متوسط المجتمع اكبر أو يساوي القيمة μ_0 وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

أما إذا كان: $T_C \prec T_T = t_{\alpha}^{(n-1)} = -t_{(1-\alpha)}^{(n-1)}$ نرفض H_0 بمستوى معنوية α ونقبل H_1، ونقول عندئذ أن متوسط المجتمع اقل من القيمة μ_0 وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

✓ **اختبار أحادي الطرف من اليمين**

ليكن لدينا مجتمع إحصائي مفرداته تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسطه μ وانحراف σ مجهول، ونريد اختبار الفرضية التالية: هل المتوسط μ اقل أو يساوي القيمة μ_0؟ هذه الحالة توافق اختبار أحادي الطرف من اليمين:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \underline{vs} \qquad H_1 : \mu \succ \mu_0$$

وبنفس الشروط السابقة يكون توزيع المعاينة للمتوسط هو:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma(\overline{X})} \rightarrow t^{(n-1)}$$

فبمستوى معنوية α يكون:

$$P\left[\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma(\overline{X})} \leq T_T = t_{(1-\alpha)}^{(n-1)}\right] = 1 - \alpha$$

نسمي $T_T = t_{(1-\alpha)}^{(n-1)}$ بالإحصائية المجدولة.

وتكون الإحصائية المحسوبة للاختبار هي:

$$T_C = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma(\overline{X})}$$

قاعدة القرار:

إذا كان: $T_C \leq T_T = t_{(1-\alpha)}^{(n-1)}$ نقبل H_0 بمستوى معنوية α، ونقول عندئذ أن متوسط المجتمع اقل أو يساوي القيمة μ_0 وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

أما أذا كان: $T_C \succ T_T = t_{(1-\alpha)}^{(n-1)}$ نرفض H_0 بمستوى معنوية α ونقبل H_1، ونقول عندئذ أن متوسط المجتمع اكبر من القيمة μ_0 وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

2.IV اختبار الفرق بين متوسطين

لدينا مجتمعان إحصائيان 1 و2 حيث أن:

المجتمع الأول: مفرداته تتبع توزيع ما بمتوسط μ_1 وانحراف σ_1؛

المجتمع الثاني: مفرداته تتبع توزيع ما بمتوسط μ_2 وانحراف σ_2؛

ونرغب في اختبار الفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$، كالمعتاد نميز الحالتين:

أولاً: حالة العينات الكبرى

✓ **اختبار ثنائي الطرف**

في هذا الجزء نريد اختبار الفرضية التالية: هل الفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ يساوي القيمة b؟ وهذه الحالة توافق اختبار ثنائي الطرف، وتكون صياغته على النحو التالي:

$$H_0: \ \mu_1 - \mu_2 = b \qquad \underline{vs} \qquad H_1: \ \mu_1 - \mu_2 \neq b \quad \left(\mu_1 - \mu_2 \prec b \ \vee \ \mu_1 - \mu_2 \succ b\right)$$

ومن اجل اختبار هذه الفرضية نأخذ من المجتمعين 1 و 2 عينتين عشوائيتين حجمهما n_1, n_2 على التوالي كلاً منهما اكبر من 30، فيكون توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ هو:

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)} \to N(0,1)$$

فبمستوى معنوية α يكون:

$$P\left[-Z_{1-\alpha/2} \leq \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)} \leq Z_{1-\alpha/2}\right] = 1-\alpha$$

نقوم بتثبيت سلسلة المتغير العشوائي $Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}$ عند الفرضية H_0 ، أي أننا نعتبرها صحيحة وعليه يكون $\mu_1 - \mu_2 = b$. وبتعويض في قيمة Z نجد أن:

$$Z_C = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - b}{\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}$$

نسمي Z_C بالإحصائية المحسوبة للاختبار.

قاعدة القرار:

إذا كان: $Z_C \in \left]-Z_{(1-\alpha/2)} \ , \ Z_{(1-\alpha/2)}\right[$ نقبل H_0 بمستوى معنوية α ، ونقول عندئذ أن الفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ يساوي القيمة b وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α .

أما أذا كان: $Z_C \notin \left]-Z_{(1-\alpha/2)} \ , \ Z_{(1-\alpha/2)}\right[$ نرفض H_0 بمستوى معنوية α ونقبل H_1 ، ونقول عندئذ أن الفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ لا يساوي القيمة b بل هو اقل أو اكبر منها $\left(\mu_1 - \mu_2 \prec b \ \vee \ \mu_1 - \mu_2 \succ b\right)$ وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α .

ونسمي المجال $\left]-Z_{(1-\alpha/2)} \ , \ Z_{(1-\alpha/2)}\right[$ بالإحصائية المجدولة.

✓ **اختبار أحادي الطرف من اليسار**

في هذا الجزء نريد اختبار الفرضية التالية: هل الفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ اكبر أو يساوي القيمة b؟ وهذه الحالة توافق اختبار أحادي الطرف من اليسار، و تكون صياغته على النحو التالي:

$$H_0 : \ \mu_1 - \mu_2 \geq b \qquad \underline{vs} \qquad H_1 : \ \mu_1 - \mu_2 \prec b$$

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)} \to N(0,1)$$

بنفس الشروط السابقة يكون توزيع الفرق هو:

فبمستوى معنوية α يكون:

$$P\left[\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)} \geq Z_T = Z_\alpha = -Z_{1-\alpha}\right] = 1 - \alpha$$

نسمي $Z_T = Z_\alpha = -Z_{(1-\alpha)}$ بالإحصائية المجدولة.

وتكون الإحصائية المحسوبة للاختبار:

$$Z_C = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - b}{\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}$$

قاعدة القرار:

إذا كان: $Z_C \geq Z_T = -Z_{(1-\alpha)}$ نقبل H_0 بمستوى معنوية α، ونقول عندئذ أن الفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ اكبر أو يساوي القيمة b وهذا على ضوء هذه العينة و بمستوى معنوية α.

أما أذا كان: $Z_C \prec Z_T = -Z_{(1-\alpha)}$ نرفض H_0 بمستوى معنوية α ونقبل H_1، ونقول عندئذ أن الفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ اقل من القيمة b وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

✓ **اختبار أحادي الطرف من اليمين**

في هذا الجزء نهتم باختبار الفرضية التالية: هل الفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ اقل أو يساوي القيمة b؟ وهذه الحالة توافق اختبار أحادي الطرف من اليمين، و تكون صياغته على النحو التالي:

$$H_0 : \ \mu_1 - \mu_2 \leq b \qquad \underline{vs} \qquad H_1 : \ \mu_1 - \mu_2 \succ b$$

بنفس الشروط السابقة يكون توزيع الفرق هو:

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)} \to N(0,1)$$

فبمستوى معنوية α يكون:

$$P\left[\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma(\bar{X}_1-\bar{X}_2)} \le Z_T = Z_{1-\alpha}\right] = 1-\alpha$$

نسمي $Z_T = Z_{(1-\alpha)}$ بالإحصائية المجدولة.

وتكون الإحصائية المحسوبة للاختبار:

$$Z_C = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-b}{\sigma(\bar{X}_1-\bar{X}_2)}$$

قاعدة القرار:

إذا كان: $Z_C \le Z_T = Z_{(1-\alpha)}$ نقبل H_0 بمستوى معنوية α، ونقول عندئذ أن الفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1-\mu_2)$ اقل أو يساوي القيمة b وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

أما أذا كان: $Z_C \succ Z_T = Z_{(1-\alpha)}$ نرفض H_0 بمستوى معنوية α ونقبل H_1، ونقول عندئذ أن الفرق $(\mu_1-\mu_2)$ اكبر من b وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

ثانياً: حالة العينات الصغرى

✓ **اختبار ثنائي الطرف**

في هذا الجزء نريد اختبار الفرضية التالية: هل الفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1-\mu_2)$ يساوي القيمة b؟ وهذه الحالة توافق اختبار ثنائي الطرف، وتكون صياغته على النحو التالي:

$$H_0:\ \mu_1-\mu_2 = b \qquad \underline{vs} \qquad H_1:\ \mu_1-\mu_2 \ne a \quad \left(\mu_1-\mu_2 \prec b \ \vee \ \mu_1-\mu_2 \succ b\right)$$

ومن اجل اختبار هذه الفرضية نأخذ من المجتمعين 1 و 2 عينتين عشوائيتين حجمهما n_1, n_2 على التوالي كلاً منهما اقل من 30 ومع العلم أن تبايني المجتمعين (σ_1^2, σ_2^2) مجهولين، ووحدات المجتمعين تتوزع طبيعياً.

فيكون توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\bar{X}_1-\bar{X}_2)$ هو:

$$T = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma(\bar{X}_1-\bar{X}_2)} \to t^{(n_1+n_2-2)}$$

فبمستوى معنوية α يكون:

$$P\left[-t_{(1-\alpha/2)}^{(n_1+n_2-2)} \le \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma(\bar{X}_1-\bar{X}_2)} \le t_{(1-\alpha/2)}^{(n_1+n_2-2)}\right] = 1-\alpha$$

وبنفس الطريقة السابقة تكون الإحصائية المحسوبة للاختبار:

$$T_C = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-b}{\sigma(\bar{X}_1-\bar{X}_2)}$$

قاعدة القرار:

إذا كان: $T_C \in \left[-t_{(1-\alpha/2)}^{(n_1+n_2-2)}, t_{(1-\alpha/2)}^{(n_1+n_2-2)}\right]$ نقبل H_0 بمستوى معنوية α، ونقول عندئذ أن الفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1-\mu_2)$ يساوي القيمة b وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

أما أذا كان: $T_C \notin \left[-t_{(1-\alpha/2)}^{(n_1+n_2-2)}, t_{(1-\alpha/2)}^{(n_1+n_2-2)}\right]$ نرفض H_0 بمستوى معنوية α ونقبل H_1، ونقول عندئذ أن الفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1-\mu_2)$ لا يساوي القيمة b بل هو اقل أو اكبر منها $(\mu_1-\mu_2 \prec b \quad \vee \quad \mu_1-\mu_2 \succ b)$ وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

ونسمي المجال $\left[-t_{(1-\alpha/2)}^{(n_1+n_2-2)}, t_{(1-\alpha/2)}^{(n_1+n_2-2)}\right]$ بالإحصائية المجدولة.

✓ اختبار أحادي الطرف من اليسار

في هذا الجزء نريد اختبار الفرضية التالية: هل الفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1-\mu_2)$ اكبر أو يساوي القيمة b؟ وهذه الحالة توافق اختبار أحادي الطرف من اليسار، و تكون صياغته على النحو التالي:

$$H_0: \ \mu_1-\mu_2 \geq b \qquad \underline{vs} \qquad H_1: \ \mu_1-\mu_2 \prec b$$

فبمستوى معنوية α يكون:

$$P\left[\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma(\overline{X}_1-\overline{X}_2)} \geq T_T = t_{\alpha}^{(n_1+n_2-2)} = -t_{(1-\alpha)}^{(n_1+n_2-2)}\right] = 1-\alpha$$

نسمي $T_T = t_{\alpha}^{(n_1+n_2-2)} = -t_{(1-\alpha)}^{(n_1+n_2-2)}$ بالإحصائية المجدولة.

وبنفس الطريقة السابقة تكون الإحصائية المحسوبة للاختبار:

$$T_C = \frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-b}{\sigma(\overline{X}_1-\overline{X}_2)}$$

قاعدة القرار:

إذا كان: $T_C \geq T_T = t_{\alpha}^{(n_1+n_2-2)} = -t_{(1-\alpha)}^{(n_1+n_2-2)}$ نقبل H_0 بمستوى معنوية α، ونقول عندئذ أن الفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1-\mu_2)$ اكبر أو يساوي القيمة b وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

أما اذا كان: $T_C \prec T_T = t_{\alpha}^{(n_1+n_2-2)} = -t_{(1-\alpha)}^{(n_1+n_2-2)}$ نرفض H_0 بمستوى معنوية α ونقبل H_1، ونقول عندئذ أن الفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1-\mu_2)$ اقل من القيمة b وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

✓ اختبار أحادي الطرف من اليمين

في هذا الجزء نهتم باختبار الفرضية التالية: هل الفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1-\mu_2)$ اقل أو يساوي القيمة b؟ وهذه الحالة توافق اختبار أحادي الطرف من اليمين، وتكون صياغته على النحو التالي:

$$H_0:\ \mu_1-\mu_2\le b \qquad \underline{vs} \qquad H_1:\ \mu_1-\mu_2\succ b$$

فبمستوى معنوية α يكون:

$$P\left[\frac{\left(\overline{X}_1-\overline{X}_2\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sigma\left(\overline{X}_1-\overline{X}_2\right)}\le T_T=t_{(1-\alpha)}^{(n_1+n_2-2)}\right]=1-\alpha$$

نسمي $T_T=t_{(1-\alpha)}^{(n_1+n_2-2)}$ بالإحصائية المجدولة.

وبنفس الطريقة السابقة تكون الإحصائية المحسوبة للاختبار:

$$T_C=\frac{\left(\overline{X}_1-\overline{X}_2\right)-b}{\sigma\left(\overline{X}_1-\overline{X}_2\right)}$$

قاعدة القرار:

إذا كان: $T_C\le T_T=t_{(1-\alpha)}^{(n_1+n_2-2)}$ نقبل H_0 بمستوى معنوية α، ونقول عندئذ أن الفرق بين متوسطي المجتمعين $\left(\mu_1-\mu_2\right)$ اقل أو يساوي القيمة b وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

أما أذا كان: $T_C\succ T_T=t_{(1-\alpha)}^{(n_1+n_2-2)}$ نرفض H_0 بمستوى معنوية α ونقبل H_1، ونقول عندئذ أن الفرق بين متوسطي المجتمعين $\left(\mu_1-\mu_2\right)$ اكبر من القيمة b وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

IV.3 اختبار نسبة صفة ما في المجتمع P

✓ اختبار ثنائي الطرف

ليكن لدينا مجتمع إحصائي، ونريد اختبار الفرضية التالية: هل نسبة صفة ما في المجتمع P تساوي القيمة P_0؟ هذه الحالة توافق اختبار ثنائي الطرف، وتكون صياغته على النحو التالي:

$$H_0:\ P=P_0 \qquad \underline{vs} \qquad H_1:\ P\ne P_0 \qquad \left(P\prec P_0 \quad\vee\quad P\succ P_0\right)$$

ومن اجل اختبار هذه الفرضية نأخذ عينة عشوائية حجمها $n\ge 30$ (أو أن تكون وحدات المجتمع الأصلي تتبع التوزيع الطبيعي فلا يهم إن كان حجم العينة $n\prec 30$) ونحسب النسبة المدروسة في العينة r فيكون توزيع المعاينة للنسبة هو:

$$\frac{r-P}{\sigma(r)}\to N(0,1)$$

فبمستوى معنوية α يكون:

$$P\left[-Z_{1-\alpha/2}\le\frac{r-P}{\sigma(r)}\le Z_{1-\alpha/2}\right]=1-\alpha$$

نقوم بتثبيت سلسلة المتغير العشوائي $Z=\frac{r-P}{\sigma(r)}$ عند الفرضية H_0، أي أننا نعتبرها صحيحة وعليه يكون $P=P_0$. وبتعويض في قيمة Z نجد أن:

$$Z_C=\frac{r-P_0}{\sigma(r)}$$

نسمي Z_C بالإحصائية المحسوبة للاختبار.

قاعدة القرار:

إذا كان: $Z_C\in\left]-Z_{(1-\alpha/2)}\ ,\ Z_{(1-\alpha/2)}\right[$ نقبل H_0 بمستوى معنوية α، ونقول عندئذ أن نسبة الصفة في المجتمع P تساوي القيمة P_0 وهذا على ضوء هذه العينة و بمستوى معنوية α.

أما إذا كان: $Z_C\notin\left]-Z_{(1-\alpha/2)}\ ,\ Z_{(1-\alpha/2)}\right[$ نرفض H_0 بمستوى معنوية α ونقبل H_1، ونقول عندئذ أن نسبة الصفة في المجتمع P لا تساوي القيمة P_0 بل هي اقل أو اكبر منها $\left(P\prec P_0\quad\vee\quad P\succ P_0\right)$ وهذا على ضوء هذه العينة و بمستوى معنوية α.

ونسمي المجال $\left]-Z_{(1-\alpha/2)}\ ,\ Z_{(1-\alpha/2)}\right[$ بالإحصائية المجدولة.

✓ **اختبار أحادي الطرف من اليسار**

نريد اختبار الفرضية التالية: هل نسبة صفة ما في المجتمع P اكبر أو تساوي القيمة P_0؟ هذه الحالة توافق اختبار أحادي الطرف من اليسار:

$$H_0:\ P\geq P_0\qquad \underline{vs}\qquad H_1:\ P\prec P_0$$

وبنفس الطريقة السابقة يكون:

$$\frac{r-P}{\sigma(r)}\to N(0,1)$$

فبمستوى معنوية α يكون:

$$P\left[\frac{r-P}{\sigma(r)}\geq Z_T=Z_\alpha\right]=1-\alpha$$

نسمي $Z_T=Z_\alpha=-Z_{(1-\alpha)}$ بالإحصائية المجدولة.

أما الإحصائية المحسوبة للاختبار فهي:

$$Z_C=\frac{r-P_0}{\sigma(r)}$$

قاعدة القرار:

إذا كان: $Z_C \geq Z_T = -Z_{(1-\alpha)}$ نقبل H_0 بمستوى معنوية α، ونقول عندئذ أن نسبة الصفة في المجتمع P اكبر أو تساوي القيمة P_0 وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

أما أذا كان: $Z_C \prec Z_T = -Z_{(1-\alpha)}$ نرفض H_0 بمستوى معنوية α ونقبل H_1، ونقول عندئذ أن نسبة الصفة في المجتمع P اقل من القيمة P_0 وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

✓ **اختبار أحادي الطرف من اليمين**

نريد اختبار الفرضية التالية: هل نسبة صفة ما في المجتمع P اقل أو تساوي القيمة P_0؟ هذه الحالة توافق اختبار أحادي الطرف من اليمين، وتكون صياغته على النحو التالي:

$$H_0: P \leq P_0 \qquad \underline{vs} \qquad H_1: P \succ P_0$$

وبنفس الطريقة السابقة يكون:

$$\frac{r-P}{\sigma(r)} \to N(0,1)$$

فبمستوى معنوية α يكون:

$$P\left[\frac{r-P}{\sigma(r)} \leq Z_T = Z_{1-\alpha}\right] = 1-\alpha$$

نسمي $Z_T = Z_{(1-\alpha)}$ بالإحصائية المجدولة.

أما الإحصائية المحسوبة للاختبار فهي:

$$Z_C = \frac{r-P_0}{\sigma(r)}$$

قاعدة القرار:

إذا كان: $Z_C \leq Z_T = Z_{(1-\alpha)}$ نقبل H_0 بمستوى معنوية α، ونقول عندئذ أن نسبة الصفة في المجتمع P اكبر أو تساوي القيمة P_0 وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

أما إذا كان: $Z_C \succ Z_T = -Z_{(1-\alpha)}$ نرفض H_0 بمستوى معنوية α ونقبل H_1، ونقول عندئذ أن نسبة الصفة في المجتمع P اقل من القيمة P_0 وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

IV.4 اختبار التباين σ^2

ليكن لدينا مجتمع إحصائي متوسطه μ وانحرافه σ، ونريد اختبار الفرضية التالية: هل تباين المجتمع σ^2 اكبر، اقل أو يساوي القيمة σ_0^2؟ نميز الحالات التالية:

✓ اختبار ثنائي الطرف

في هذه الحالة نريد اختبار الفرضية التالية: هل تباين المجتمع σ^2 يساوي القيمة σ_0^2؟هذه الحالة توافق اختبار ثنائي الطرف، وتكون صياغته على النحو التالي:

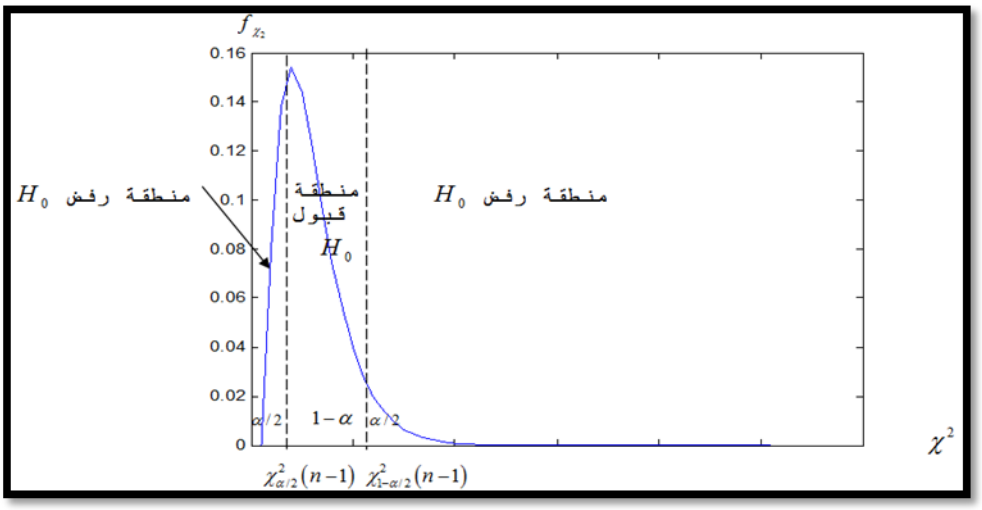
$$H_0:\ \sigma^2=\sigma_0^2 \qquad \underline{vs} \qquad H_1:\ \sigma^2\neq\sigma_0^2 \qquad \left(\sigma^2\prec\sigma_0^2 \quad \vee \quad \sigma^2\succ\sigma_0^2\right)$$

ومن اجل اختبار هذه الفرضية نأخذ عينة عشوائية حجمها $n\prec 100$ ووحدات المجتمع الأصلي تتبع التوزيع الطبيعي ونحسب التباين S^2 والتباين المصحح للعينة $\widehat{S}^2$ فيكون توزيع المعاينة للتباينات هو:

$$\chi^2=\frac{(n-1).\widehat{S}^2}{\sigma^2}=\frac{n.S^2}{\sigma^2}\rightarrow\chi^2_{(n-1)}$$

فبمستوى معنوية α يكون:

$$P\left[\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\leq\frac{(n-1).\widehat{S}^2}{\sigma^2}\leq\chi^2_{(1-\alpha/2)}(n-1)\right]=P\left[\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\leq\frac{n.S^2}{\sigma^2}\leq\chi^2_{(1-\alpha/2)}(n-1)\right]=1-\alpha$$



نقوم بتثبيت سلسلة المتغير العشوائي $\frac{(n-1).\widehat{S}^2}{\sigma^2}=\frac{n.S^2}{\sigma^2}$ عند الفرضية H_0 ، أي أننا نعتبرها صحيحة

وعليه يكون $\sigma^2=\sigma_0^2$

وبتعويض في قيمة χ^2 نجد أن:

$$\chi^2_C=\frac{(n-1).\widehat{S}^2}{\sigma_0^2}=\frac{n.S^2}{\sigma_0^2}$$

نسمي χ^2_C بالإحصائية المحسوبة للاختبار.

قاعدة القرار:

إذا كان: $\chi_C^2 \in \left[\chi_{\alpha/2}^2(n-1)\ ,\ \chi_{(1-\alpha/2)}^2(n-1)\right]$ نقبل H_0 بمستوى معنوية α، ونقول عندئذ أن تباين المجتمع σ^2 يساوي القيمة σ_0^2 وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

أما اذا كان: $\chi_C^2 \notin \left[\chi_{\alpha/2}^2(n-1)\ ,\ \chi_{(1-\alpha/2)}^2(n-1)\right]$ نرفض H_0 بمستوى معنوية α ونقبل H_1، ونقول عندئذ أن تباين المجتمع σ^2 لا يساوي القيمة σ_0^2 بل هو اقل أو اكبر منها $\left(\sigma^2 \prec \sigma_0^2 \quad \vee \quad \sigma^2 \succ \sigma_0^2\right)$ وهذا على ضوء هذه العينة و بمستوى معنوية α.

✓ **اختبار أحادي الطرف من اليسار**

في هذه الحالة نريد اختبار الفرضية التالية: هل تباين المجتمع σ^2 اكبر أو يساوي القيمة σ_0^2؟ هذه الحالة توافق أحادي الطرف من اليسار، و تكون صياغته على النحو التالي:

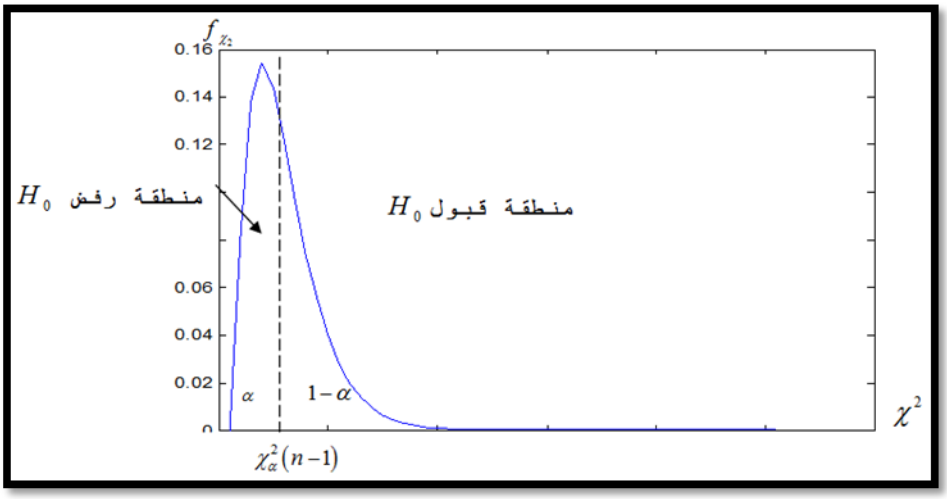
$$H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \qquad \underline{vs} \qquad H_1 : \sigma^2 \prec \sigma_0^2$$

بنفس الشروط السابقة يكون توزيع المعاينة للتباينات العينة هو:

$$\chi^2 = \frac{(n-1).\widehat{S}^2}{\sigma^2} = \frac{n.S^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi_{(n-1)}^2$$

فبمستوى معنوية α يكون:

$$P\left[\frac{(n-1).\widehat{S}^2}{\sigma^2} \geq \chi_\alpha^2(n-1)\right] = P\left[\frac{n.S^2}{\sigma^2} \geq \chi_\alpha^2(n-1)\right] = 1-\alpha$$



α $\quad$ $1-\alpha$

نسمي $\chi_T^2 = \chi_\alpha^2(n-1)$ بالإحصائية المجدولة

وبنفس الطريقة تكون الإحصائية المحسوبة للاختبار هي:

$$\chi_C^2 = \frac{(n-1).\widehat{S}^2}{\sigma_0^2} = \frac{n.S^2}{\sigma_0^2}$$

قاعدة القرار:

إذا كان: $\chi_C^2 \geq \chi_T^2 = \chi_\alpha^2(n-1)$ نقبل H_0 بمستوى معنوية α، ونقول عندئذ أن تباين المجتمع σ^2 اكبر أو يساوي القيمة σ_0^2 و هذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

أما إذا كان: $\chi_C^2 \prec \chi_T^2 = \chi_\alpha^2(n-1)$ نرفض H_0 بمستوى معنوية α ونقبل H_1، ونقول عندئذ أن تباين المجتمع σ^2 اقل من القيمة σ_0^2 وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

✓ **اختبار أحادي الطرف من اليمين**

في هذه الحالة نريد اختبار الفرضية التالية: هل تباين المجتمع σ^2 اقل أو يساوي القيمة σ_0^2؟ هذه الحالة توافق اختبار أحادي الطرف من اليمين، وتكون صياغته على النحو التالي:

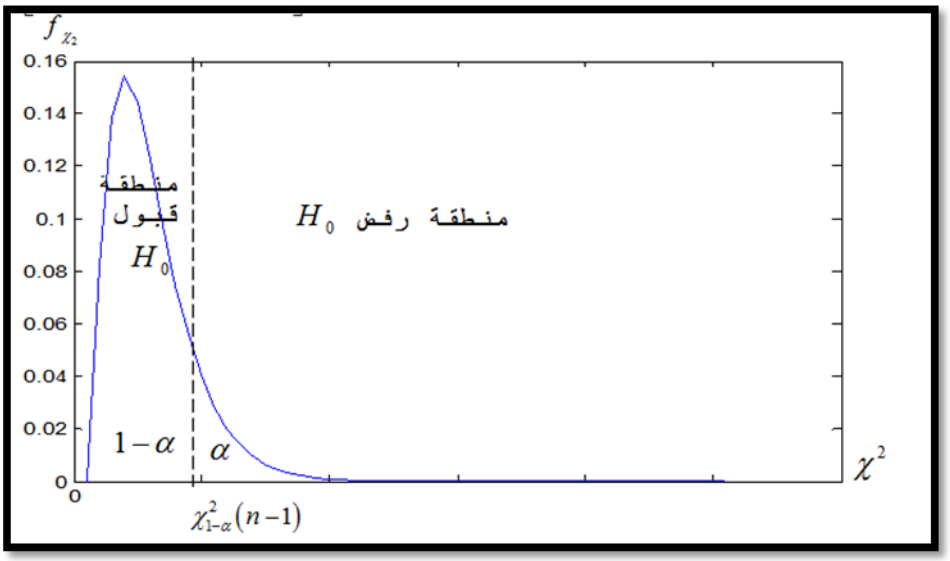
$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \qquad \underline{vs} \qquad H_1 : \sigma^2 \succ \sigma_0^2$$

وبنفس الطريقة تكون الإحصائية المحسوبة للاختبار هي:

$$\chi_C^2 = \frac{(n-1).\widehat{S}^2}{\sigma_0^2} = \frac{n.S^2}{\sigma_0^2}$$

فبمستوى معنوية α يكون:

$$P\left[\frac{(n-1).\widehat{S}^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{(1-\alpha)}(n-1)\right] = P\left[\frac{n.S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{(1-\alpha)}(n-1)\right] = 1-\alpha$$



قاعدة القرار:

إذا كان: $\chi_C^2 \le \chi_T^2 = \chi_{(1-\alpha)}^2(n-1)$ نقبل H_0 بمستوى معنوية α، ونقول عندئذ أن تباين المجتمع σ^2 اقل أو يساوي القيمة σ_0^2 وهذا على ضوء هذه العينة و بمستوى معنوية α.

أما أذا كان: $\chi_C^2 \succ \chi_T^2 = \chi_{(1-\alpha)}^2(n-1)$ نرفض H_0 بمستوى معنوية α ونقبل H_1، ونقول عندئذ أن تباين المجتمع σ^2 اكبر من القيمة σ_0^2 وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

IV.5 اختبار نسبة تباينين σ_1^2 / σ_2^2

لدينا مجتمعان إحصائيان وحداتهما تتوزع طبيعياً و مستقلين عن بعض تبايناهما σ_1^2, σ_2^2، نرغب في هذا الفرع المقارنة بين نسبة تباين المجتمع الأول إلى تباين المجتمع الثاني اي النسبة $\left(\sigma_1^2 / \sigma_2^2\right)$ وعدد ثابت b. من اجل ذلك نميز الحالات التالية:

✓ اختبار ثنائي الطرف

في هذه الحالة نريد اختبار الفرضية التالية: هل نسبة تباين المجتمع الأول إلى تباين المجتمع الثاني أي النسبة $\left(\sigma_1^2 / \sigma_2^2\right)$ تساوي القيمة b؟ هذه الحالة توافق اختبار ثنائي الطرف، وتكون صياغته على النحو التالي:

$$H_0 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 = b \qquad \underline{vs} \qquad H_1 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \neq b \qquad \left(\sigma_1^2 / \sigma_2^2 \prec b \quad \vee \quad \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \succ b\right)$$

ومن اجل اختبار هذه الفرضية نسحب من المجتمعين عينتين عشوائيتين حجمهما على التوالي n_1, n_2 (يجب أن تكون وحدات المجتمع الأصلي 1 و2 تتبع التوزيع الطبيعي و حجم العينتين n_1, n_2 اقل من مائة) ونحسب S_1^2 تباين العينة المستخرجة من المجتمع الأول و S_2^2 تباين العينة المستخرجة من المجتمع الثاني، يكون توزيع المعاينة لنسبة التباينين هو:

$$F = \frac{\widehat{S}_1^2 / \sigma_1^2}{\widehat{S}_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{\widehat{S}_1^2 / \widehat{S}_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \rightarrow F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

فبمستوى معنوية α يكون:

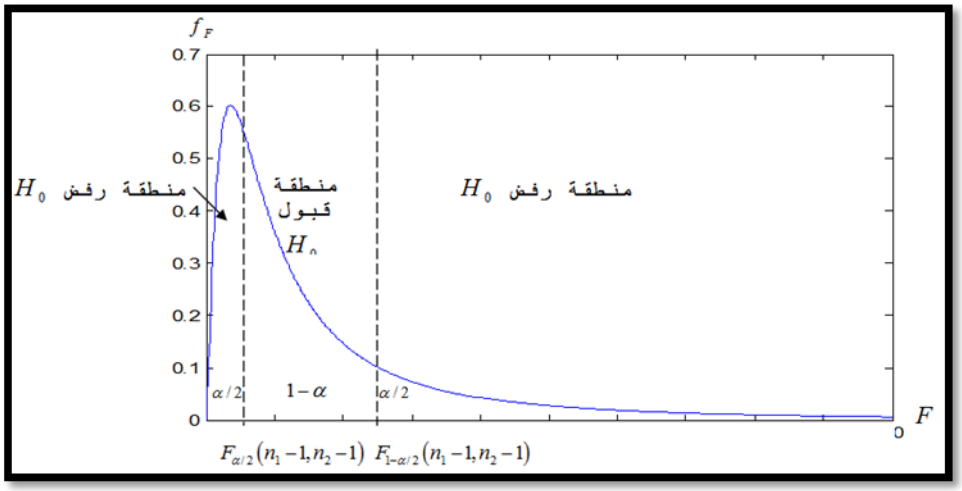
$$P\left[F_{\alpha/2}^{(n_1-1,n_2-1)} \le \frac{\widehat{S}_1^2 / \sigma_1^2}{\widehat{S}_2^2 / \sigma_2^2} \le F_{(1-\alpha/2)}^{(n_1-1,n_2-1)}\right] = 1-\alpha$$

$$F = \frac{\widehat{S}_1^2 / \widehat{S}_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2}$$

نقوم بتثبيت سلسلة المتغير العشوائي σ_1^2/σ_2^2 عند الفرضية H_0 ، أي أننا نعتبرها صحيحة وعليه يكون $\sigma_1^2/\sigma_2^2 = b$. وبتعويض في قيمة F نجد أن:

$$F_C = \frac{\widehat{S}_1^2 / \widehat{S}_2^2}{b}$$

نسمي F_C بالإحصائية المحسوبة للاختبار.



قاعدة القرار:

إذا كان: $F_C \in \left[F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\ ,\ F_{(1-\alpha/2)}(n_1-1,n_2-1)\right]$ نقبل H_0 بمستوى معنوية α ، ونقول عندئذ أن نسبة تباين المجتمع الأول إلى تباين المجتمع الثاني أي النسبة $\left(\sigma_1^2/\sigma_2^2\right)$ تساوي القيمة b وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α .

أما اذا كان: $F_C \notin \left[F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\ ,\ F_{(1-\alpha/2)}(n_1-1,n_2-1)\right]$ نرفض H_0 بمستوى معنوية α ونقبل H_1 ، ونقول عندئذ أن نسبة تباين المجتمع الأول إلى تباين المجتمع الثاني أي النسبة $\left(\sigma_1^2/\sigma_2^2\right)$ لا تساوي القيمة b بل هي اقل أو اكبر منها $\left(\sigma_1^2/\sigma_2^2 \prec b \quad \vee \quad \sigma_1^2/\sigma_2^2 \succ b\right)$ وهذا على ضوء هذه العينة و بمستوى معنوية α .

ونسمي المجال $\left[F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\ ,\ F_{(1-\alpha/2)}(n_1-1,n_2-1)\right]$ بالإحصائية المجدولة.

✓ اختبار أحادي الطرف من اليسار

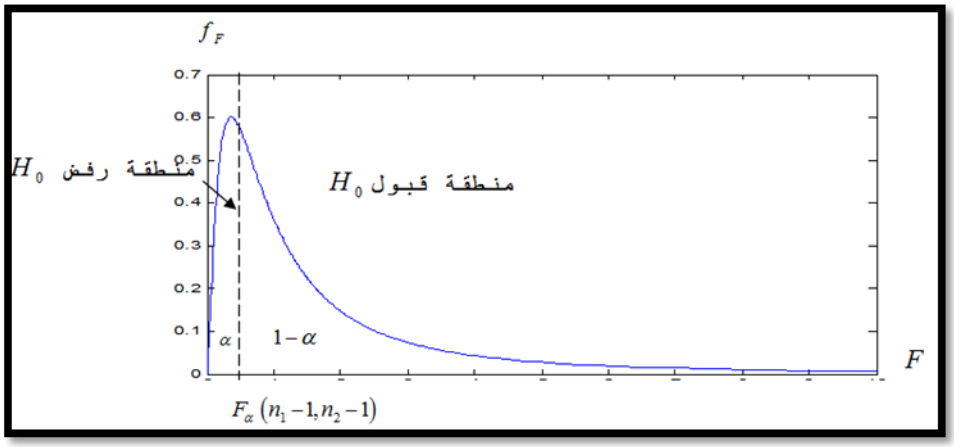
في هذه الحالة نريد اختبار الفرضية التالية: هل نسبة تباين المجتمع الأول إلى تباين المجتمع الثاني أي النسبة $\left(\sigma_1^2/\sigma_2^2\right)$ اكبر أو تساوي القيمة b؟ هذه الحالة توافق اختبار أحادي الطرف من اليسار، وتكون صياغته على النحو التالي:

$$H_0: \sigma_1^2/\sigma_2^2 \geq b \qquad \underline{vs} \qquad H_1: \sigma_1^2/\sigma_2^2 \prec b$$

وبنفس الطريقة يكون توزيع المعاينة لنسبة التباينين هو:

$$F = \frac{\widehat{S}_1^2/\sigma_1^2}{\widehat{S}_2^2/\sigma_2^2} = \frac{\widehat{S}_1^2/\widehat{S}_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \rightarrow F(n_1-1, n_2-1)$$

فبمستوى معنوية α يكون:



ونكتب:

$$P\left[\frac{\widehat{S}_1^2/\sigma_1^2}{\widehat{S}_2^2/\sigma_2^2} \geq F_\alpha^{(n_1-1,n_2-1)}\right] = 1-\alpha$$

نسمي $F_T = F_\alpha^{(n_1-1,n_2-1)}$ بالإحصائية المجدولة.

وبنفس الطريقة تكون الإحصائية المحسوبة للاختبار هي:

$$F_C = \frac{\widehat{S}_1^2 / \widehat{S}_2^2}{b}$$

قاعدة القرار:

إذا كان: $F_C \geq F_T = F_\alpha^{(n_1-1,n_2-1)}$ نقبل H_0 بمستوى معنوية α، ونقول عندئذ أن نسبة تباين المجتمع الأول إلى تباين المجتمع الثاني أي النسبة $\left(\sigma_1^2 / \sigma_2^2\right)$ اكبر أو تساوي القيمة b وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

أما إذا كان: $F_C \leq F_T = F_\alpha^{(n_1-1,n_2-1)}$ نرفض H_0 بمستوى معنوية α ونقبل H_1، ونقول عندئذ أن نسبة تباين المجتمع الأول إلى تباين المجتمع الثاني أي النسبة $\left(\sigma_1^2 / \sigma_2^2\right)$ اقل من القيمة b وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

✓ **اختبار أحادي الطرف من اليمين**

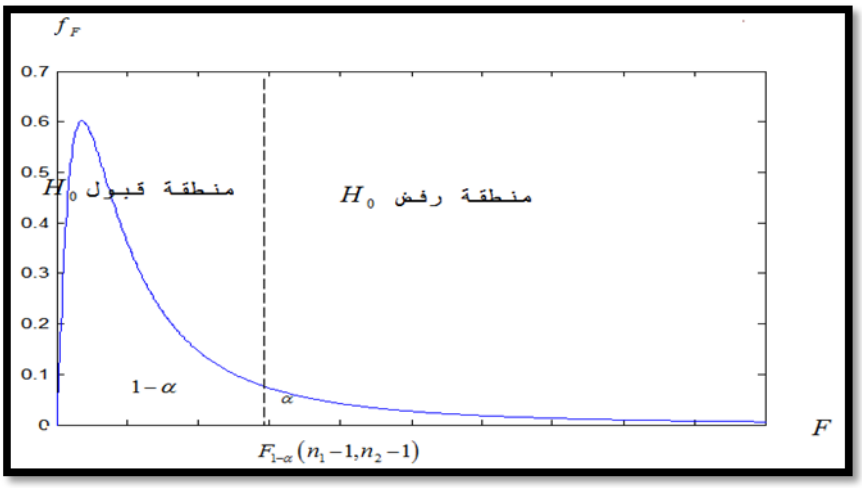
في هذه الحالة نريد اختبار الفرضية التالية: هل نسبة تباين المجتمع الأول إلى تباين المجتمع الثاني أي النسبة $\left(\sigma_1^2 / \sigma_2^2\right)$ اقل أو تساوي القيمة b؟ هذه الحالة توافق اختبار أحادي الطرف من اليمين، وتكون صياغته على النحو التالي:

$$H_0 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \leq b \qquad \underline{vs} \qquad H_1 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \succ b$$

وبنفس الطريقة يكون توزيع المعاينة لنسبة التباينين هو:

$$F = \frac{\widehat{S}_1^2 / \sigma_1^2}{\widehat{S}_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{\widehat{S}_1^2 / \widehat{S}_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \rightarrow F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

فبمستوى معنوية α يكون:



ونكتب:

$$P\left[\frac{\widehat{S}_1^2/\sigma_1^2}{\widehat{S}_2^2/\sigma_2^2} \le F_{(1-\alpha)}^{(n_1-1,n_2-1)}\right]=1-\alpha$$

نسمي $F_T = F_{(1-\alpha)}^{(n_1-1,n_2-1)}$ بالإحصائية المجدولة.

وبنفس الطريقة تكون الإحصائية المحسوبة للاختبار هي:

$$F_C = \frac{\widehat{S}_1^2/\widehat{S}_2^2}{b}$$

قاعدة القرار:

إذا كان: $F_C \le F_T = F_{(1-\alpha)}^{(n_1-1,n_2-1)}$ نقبل H_0 بمستوى معنوية α، ونقول عندئذ أن نسبة تباين المجتمع الأول إلى تباين المجتمع الثاني أي النسبة $\left(\sigma_1^2/\sigma_2^2\right)$ اقل أو تساوي القيمة b وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

أما إذا كان: $F_C \ge F_T = F_{(1-\alpha)}^{(n_1-1,n_2-1)}$ نرفض H_0 بمستوى معنوية α ونقبل H_1، ونقول عندئذ أن نسبة تباين المجتمع الأول إلى تباين المجتمع الثاني أي النسبة $\left(\sigma_1^2/\sigma_2^2\right)$ اكبر من القيمة b وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية α.

V. تمارين ومسائل مقترحة مع الحلول

1.V بالنسبة لتوزيعات المعاينة

1.1.V التمارين والمسائل

التمرين(01):

إذا كان دخل 1000 أسرة في مدينة ما يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط دينار $\mu = 1800$ وبانحراف معياري دينار $\sigma = 300$. نختار عشوائياً إحدى الأسر، ما هو احتمال أن يكون دخل هذه الأسرة:

1. اكبر من 2400 دينار
2. اقل من 1947 دينار
3. محصور بين 2400 و 2550 دينار
4. اوجد عدد الأسر التي يزيد دخلها عن 2400 دينار

التمرين(02):

إذا كانت التعويضات على السكن المعطاة بإحدى الشركات الكبرى تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه $\mu = 170$ دينار وبتباين $\sigma^2 = 64$ دينار^2.

1. اخترنا موظفاً عشوائيا فما احتمال أن يقل تعويض السكن عندا هذا الموظف عن 166 دينار؟
2. قمنا بسحب عينة عشوائية تتكون من 64 موظف. فما احتمال أن يكون متوسط تعويض سكنهم اكبر من 172 دينار؟

التمرين(03):

مجتمع إحصائي مفرداته تتوزع طبيعياً حجمه $N = 900$ بمتوسط $\mu = 20$ وانحراف معياري $\sigma = 12$ نستخرج كل العينات الممكنة.

- احسب احتمال أن يكون متوسط هذه العينات محصوراً بين 18 و 22 في الحالتين التاليتين:

1. حجم العينة هو $n = 26$
2. حجم العينة هو $n = 64$

التمرين(04):

إذا كان عدد الحوادث الأسبوعية على إحدى الطرق يتبع توزيع بواسون بمتوسط يساوي 4 حوادث في كل أسبوع

1. نختار احد الأسابيع عشوائياً، ما احتمال حصول حادثين على الأكثر؟
2. خلال 64 أسبوع ، ما احتمال أن يكون متوسط عدد الحوادث فيها يزيد عن 4.2 حادثاً؟

التمرين(05):

في إطار دراسة الزيادة السنوية في الراتب لموظفي إحدى الشركات الكبرى (نفترضها تخضع لتوزيع الطبيعي)، قمنا بأخذ عينة عشوائية تتكون من 25 موظف فوجدنا أنهم يتوزعون حسب الجدول التالي:

مقدار الزيادة	[20,30[	[30,40[	[40,50[	[50,60]
عدد الموظفين	03	07	11	04

- على أساس هذه النتائج احسب احتمال أن يكون متوسط الزيادة في الراتب لدى هذه الشركة محصور بين 37.76 و 45.24 دينار؟

التمرين(06):

ينتج احد المصانع 10.000 مصباح في اليوم نسبة المصابيح التالفة في هذا الإنتاج هي 3%. اشترى شخص 400 مصباح من هذا المصنع، ما هو احتمال أن يكون من بينها 20 مصباح على الأقل تالفة؟

التمرين(07):

إذا كانت نسبة الموظفين الذين حصلوا على زيادة في الراتب بإحدى الشركات الكبرى 91% ، اخترنا عينة عشوائية تتكون من 1000 موظف ، فما هو احتمال أن نجد من بينهم 70 على الأكثر لم يحصلوا على زيادة في الراتب؟

التمرين(08):

لدينا مجتمع طبيعي حجمه $N=100$ نسحب منه عينة عشوائية حجمها $n=16$. فإذا علمت أن تباين المجتمع هو $\sigma^2=80$ ، ما هو احتمال أن يكون تباين العينة S^2 اقل أو يساوي 71.695 ؟

التمرين(09):

عينتين عشوائيتين حجمهما على التوالي: $n_1=8, n_2=10$ مسحوبتين من مجتمعين طبيعيين تبايناهما على التوالي: $\sigma_1^2=20, \sigma_2^2=36$ ، ما هو احتمال أن يكون تباين العينة الأولى S_1^2 اكبر من ضعف تباين العينة الثانية S_2^2 ؟

V.2.1 الحلول

حل التمرين(01):

ليكن X متغير عشوائي مستمر يمثل دخل الأسرة، يكون: $X \to N(1800,300)$

1. حساب احتمال أن يكون دخل هذه الأسرة اكبر من 2400 دينار:

$$P(X \geq 2400) = P\left(\frac{X-1800}{300} \geq \frac{2400-1800}{300}\right)$$

$Z = \frac{X-1800}{300}$: هو م ع يتبع التوزيع الطبيعي القياسي أي أن: $Z \to N(0,1)$ يكون:

$$P(X \geq 2400) = P\left(\frac{X-1800}{300} \geq \frac{2400-1800}{300}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2)$$
$$= 1 - \Psi_Z(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

إذن احتمال أن يكون دخل هذه الأسرة اكبر من 2400 دينار هو: 2.28%

2. حساب احتمال أن يكون دخل هذه الأسرة اقل من 1947 دينار:

$$P(X \leq 1947) = P\left(\frac{X-1800}{300} \geq \frac{1947-1800}{300}\right) = P(Z \leq 0.49) = 0.6879$$

إذن احتمال أن يكون دخل هذه الأسرة دخل هذه الأسرة اقل من 1947 دينار: 68.79%

3. حساب احتمال أن يكون دخل هذه الأسرة محصور بين 2400 و 2550 دينار:

$$P(2400 \leq X \leq 2550) = P\left(\frac{2400-1800}{300} \leq \frac{X-1800}{300} \leq \frac{2550-1800}{300}\right) = P(2 \leq Z \leq 2.5)$$
$$= P(Z \leq 2.5) - P(Z \leq 2) = 0.9938 - 0.9772 = 0.0166$$

إذن احتمال أن يكون دخل هذه الأسرة دخل هذه الأسرة محصور بين 2400 و 2550 دينار: 1.66%

4. إيجاد عدد الأسر التي يزيد دخلها عن 2400 دينار

نرمز لعدد الأسر التي يزيد دخلها عن 2400 بـ N يكون:

$$N = P(X \geq 2400).1000 = 0.0228 \times 1000 = 22.8 \approx 23$$

إذن عدد الأسر التي يزيد دخلها عن 2400 دينار هـ حوالي 23 أسرة.

حل التمرين(02):

ليكن X متغير عشوائي مستمر يمثل التعويضات على السكن المعطاة بإحدى الشركات الكبرى ، يكون:

$$X \to N(170,8)$$

1. حساب احتمال أن يقل تعويض السكن عندا هذا الموظف عن 166 دينار:

$$P(X \le 166) = P\left(\frac{X-170}{8} \prec \frac{166-170}{8}\right)$$

$Z = \frac{X-170}{8}$: هو م ع يتبع التوزيع الطبيعي القياسي أي أن: $Z \to N(0,1)$ يكون:

$$P(X \le 166) = P(Z \prec -0.5) = 1 - P(Z \le 0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

2. قمنا بسحب عينة عشوائية تتكون من 64 موظف. حساب احتمال أن يكون متوسط تعويض سكنهم اكبر من 172 دينار: متوسط تعويضات السكن في العينة هو: $\overline{X}$

لدينا: $n = 64 \succ 30$ أي حالة العينات الكبرى، وعليه يكون توزيع $\overline{X}$ هو: $\overline{X} \to N\left(E\left(\overline{X}\right), \sigma\left(\overline{X}\right)\right)$

$E(\overline{X}) = \mu = 170$ ولدينا كذلك حجم المجتمع غير محدود أي أن: $n/N \to 0 \prec 30$ وعليه فان المعاينة غير نفاذية وتكون قيمة الانحراف لمتوسط العينة: $\sigma(\overline{X}) = \sigma/\sqrt{n} = 8/\sqrt{64} = 1$

ومنه يكون توزيع $\overline{X}$ هو: $\overline{X} \to N(170,1)$ يكون:

$$P(\overline{X} \ge 172) = P\left(Z \ge \frac{172-170}{1}\right) = P(Z \ge 2) = 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

حل التمرين(03):

ليكن X متغير عشوائي مستمر يمثل الظاهرة المدروسة، يكون: $X \to N(20,12)$

حساب احتمال أن يكون متوسط هذه العينات محصوراً بين 18 و 22 في الحالتين التاليتين:

1. حالة حجم العينة هو $n = 26$:

لدينا $n = 26 \prec 30$ حالة العينات الصغرى يكون: $T = \frac{\overline{X} - E(\overline{X})}{\sigma(\overline{X})} \to t^{(n-1)}$

ولدينا: $n/N = 26/900 = 0.028 \prec 0.05$ وعليه فان المعاينة غير نفاذية وتكون قيمة الانحراف لمتوسط العينة:

$$\sigma(\overline{X}) = \sigma/\sqrt{n} = 12/\sqrt{26} = 2.35$$

ومنه يكون توزيع $\overline{X}$ هو: $T = \frac{\overline{X} - E(\overline{X})}{\sigma(\overline{X})} = \frac{\overline{X} - 20}{2.35} \to t^{(26-1)} \to t^{25}$

احتمال أن يكون متوسط هذه العينات محصوراً بين 18 و 22 هو:

$$P\left(18 \le \overline{X} \le 22\right) = P\left(\frac{18-20}{2.35} \le \frac{\overline{X}-20}{2.35} \le \frac{22-20}{2.35}\right) = P\left(-0.85 \le T \le 0.85\right)$$

$$= 2.P\left(T \le 0.85\right) - 1 = 2 \times 0.8 - 1 = 0.60$$

2. حالة حجم العينة هو $n = 64$:

لدينا $n = 64 \succ 30$ حالة العينات الكبرى يكون: $\overline{X} \to N\left(E(\overline{X}), \sigma(\overline{X})\right)$

ولدينا: $n/N = 64/900 = 0.071 \succ 0.05$ وعليه فان المعاينة نفاذية وتكون قيمة الانحراف لمتوسط العينة:

$$\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \frac{N-n}{N-1} = \frac{20}{\sqrt{64}} \cdot \frac{900-20}{900-1} = 1.92$$

ومنه يكون توزيع $\overline{X}$ هو: $\overline{X} \to N(20,\ 1.92)$

احتمال أن يكون متوسط هذه العينات محصوراً بين 18 و 22 هو:

$$P(18 \le \overline{X} \le 22) = P\left(\frac{18-20}{1.92} \le \frac{\overline{X}-20}{1.92} \le \frac{22-20}{1.92}\right)$$

$Z = \frac{\overline{X}-20}{1.92}$: هو م ع يتبع التوزيع الطبيعي القياسي أي أن: $Z \to N(0,1)$ يكون:

$$P(18 \le \overline{X} \le 22) = P\left(\frac{18-20}{1.92} \le \frac{\overline{X}-20}{1.92} \le \frac{22-20}{1.92}\right) = P(-1.04 \le Z \le 1.04)$$

$$= 2 \times P(Z \le 1.04) - 1 = 2 \times 0.8508 - 1 = 0.7016$$

حل التمرين(04):

ليكن X متغير عشوائي متقطع يمثل عدد الحوادث في كل أسبوع، يكون: $X \to \mathrm{P}(4)$

1. نختار احد الأسابيع عشوائيا، احتمال حصول حادثين على الأكثر هو:

$$P(X \le 2) = P(X=2) + P(X=1) + P(X=0) = 0.018 + 0.072 + 0.144 = 0.234$$

2.خلال 64 أسبوع، احتمال أن يكون متوسط عدد الحوادث فيها يزيد عن 4.2 حادثاً هو: $P(\overline{X} \ge 4.2)$

تحديد توزيع $\overline{X}$:

لدينا $n = 64 \succ 30$ حالة العينات الكبرى يكون:

$$\overline{X} \to N(E(\overline{X}), \sigma(\overline{X}))$$

$$E(\overline{X}) = E(X) = \lambda = 4$$

ولدينا المجتمع غير محدود: $n/N = 64/N \to 0 \prec 0.05$ وعليه فان المعاينة غير نفاذية و تكون قيمة الانحراف لمتوسط العينة: $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{64}} = 0.25$

ومنه يكون توزيع $\overline{X}$ هو: $\overline{X} \to N(4,\ 0.25)$

احتمال أن يكون متوسط عدد الحوادث في هذه العينة يزيد عن 4.2 حادثاً هو:

$$P(\overline{X} \ge 4.2) = P\left(\frac{\overline{X}-4}{0.25} \ge \frac{4.2-4}{0.25}\right) = P(Z \ge 0.8) = 1 - P(Z \le 0.8) = 1 - 0.7881 = 0.2119$$

حل التمرين(05):

ليكن X_i متغير عشوائي مستمر يمثل الزيادة في الراتب للعامل i لدى هذه الشركة. ليكن μ هو متوسط الزيادة في الراتب لدى هذه الشركة، يكون: $X \to N(\mu,\sigma)$

حساب احتمال أن يكون متوسط الزيادة في الراتب لدى هذه الشركة محصور بين 37.76 و 45.24 دينار

أي المطلوب هو حساب: $P(37.76 \le \mu \le 45.24)$ لدينا:

$$P(37.76 \le \mu \le 45.24) = P(-45.24 \le -\mu \le -37.76) = P\left(\frac{\overline{X}-45.24}{\sigma(\overline{X})} \le \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma(\overline{X})} \le \frac{\overline{X}-37.76}{\sigma(\overline{X})}\right)$$

لدينا: $n = 25 \prec 30$ حالة العينات الصغرى يكون: $t^{24} \to t^{(n-1)} \to T = \left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma(\overline{X})}\right)$ يكون:

$$P(37.76 \le \mu \le 45.24) = P(-45.24 \le -\mu \le -37.76) = P\left(\frac{\overline{X}-45.24}{\sigma(\overline{X})} \le T \le \frac{\overline{X}-37.76}{\sigma(\overline{X})}\right)$$

حساب $\overline{X}$, $\sigma(\overline{X})$:

لدينا المجتمع غير محدود: $n/N = 25/N \to 0 \prec 0.05$ وعليه فان المعاينة غير نفاذية و تكون قيمة الانحراف لمتوسط العينة: $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

وعلى اعتبار أن تباين المجتمع σ^2 مجهول فإننا نستعمل بدله تباين العينة المصحح $\widehat{S}^2$ والذي يساوي:

$$\widehat{S}^2 = \frac{1}{(1-n)}\sum_{i=1}^{4} n_i.(X_i - \overline{X})^2$$

لدينا:

مقدار الزيادة	n_i	X_i	$n_i.X_i$	$n_i.(X_i-\overline{X})^2$
[20,30[	3	25	75	816.75
[30,40[	7	35	245	295.75
[40,50[	11	45	495	134.75
[50,60]	4	55	220	729
المجموع	25	/	1035	1976.25

حساب المتوسط: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} n_i X_i = \frac{1035}{25} = 41.5$

حساب تباين العينة المصحح $\widehat{S}^2$: $\widehat{S}^2 = \frac{1}{(1-n)}\sum_{i=1}^{4} n_i.(X_i-\overline{X})^2 = \frac{1976.25}{24} = 82.34$

فتكون قيمة انحراف المعياري المصحح للعينة: $\widehat{S}^2 = 82.34 \Rightarrow \widehat{S} = \sqrt{82.34} = 9.074$

نعوض في قيمة $\sigma(\overline{X})$ فنجد أن: $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}} = \frac{9.074}{\sqrt{25}} = 1.815$

ومنه يكون:

$$P(37.76 \le \mu \le 45.24) = P(-45.24 \le -\mu \le -37.76) = P\left(\frac{\overline{X} - 45.24}{\sigma(\overline{X})} \le T \le \frac{\overline{X} - 37.76}{\sigma(\overline{X})}\right)$$

$$= P\left(\frac{41.5 - 45.24}{1.815} \le T \le \frac{41.5 - 37.76}{1.815}\right) = P(-2.060 \le T \le 2.060)$$

$$= 2 \times P(T \le 2.060) - 1 \approx 2 \times 0.975 - 1 \approx 0.95$$

حل التمرين(06):

$n = 400$, $N = 10000$: حجم العينة وحجم المجتمع على التوالي.

P : يمثل نسبة المصابيح التالفة في إنتاج هذا المصنع $P = 3\%$.

X : عدد المصابيح التالفة في العينة.

$r = \frac{X}{n}$: يمثل نسبة المصابيح التالفة في العينة.

حساب احتمال أن يكون في العينة 20 مصباح على الأقل تالفة

لدينا: $P(X \ge 20) = P\left(\frac{X}{400} \ge \frac{20}{400}\right) = P(r \ge 0.05)$

والآن يجب تحديد توزيع r :

لدينا: $n = 400 \succ 30$ حالة العينات الكبرى، يكون r يتوزع حسب التوزيع الطبيعي

$$r \to N(E(r), \sigma(r)) \quad ، \quad E(r) = P = 0.03$$

ولدينا: $n/N = 400/10000 = 0.04 \prec 0.05$ حالة المعاينة غير النفاذية، يكون:

$r \to N(0.03, 0.01)$ يكون: $\sigma(r) = \sqrt{\frac{0.03.(1-0.03)}{400}} = 0.01$

إذن الاحتمال المطلوب هو:

$$P(X \ge 20) = P\left(\frac{X}{400} \ge \frac{20}{400}\right) = P(r \ge 0.05) = P\left(\frac{r - 0.03}{0.01} \ge \frac{0.05 - 0.03}{0.01}\right)$$

$$= P(Z \ge 2) = 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

حل التمرين(07):

$n=1000$: حجم العينة.

نرمز بـ X لعدد الموظفين في العينة اللذين لم يحصلو على زيادة في الراتب.

نرمز بـ $r=\dfrac{X}{n}$ لنسبة الموظفين في العينة اللذين لم يحصلو على زيادة في الراتب.

نرمز بـ P لنسبة الموظفين في الشركة اللذين لم يحصلو على زيادة في الراتب.

يكون: $P=1-0.91=0.09$

حساب احتمال أن نجد في العينة 70 على الأكثر لم يحصلوا على زيادة في الراتب:

$$P(X\le 70)=P\left(\frac{X}{1000}\le\frac{70}{1000}\right)=P(r\le 0.07)$$

والآن يجب تحديد توزيع r :

لدينا: $n=1000\succ 30$ حالة العينات الكبرى، يكون r يتوزع حسب التوزيع الطبيعي

$$r\to N(E(r),\sigma(r)) \quad ، \quad E(r)=P=0.09$$

ولدينا: المجتمع غير محدود $0\prec 0.05\to {}^{n}\!/_{N}={}^{400}\!/_{N}$ حالة المعاينة غير النفاذية، يكون:

$$\sigma(r)=\sqrt{\frac{0.09.(1-0.09)}{1000}}=0.01 \quad \text{يكون:} \quad r\to N(0.09,0.01)$$

إذن الاحتمال المطلوب هو:

$$P(X\le 70)=P\left(\frac{X}{1000}\le\frac{70}{1000}\right)=P(r\le 0.07)=P\left(\frac{r-0.09}{0.01}\le\frac{0.07-0.09}{0.01}\right)$$
$$=P(Z\le -2)=1-P(Z\le 2)=1-0.9772=0.0228$$

حل التمرين(08):

حساب احتمال أن يكون تباين العينة S^2 اقل أو يساوي 71.695:

$$P(S^2\le 71.695)=P\left(\frac{n.S^2}{\sigma^2}\le\frac{16\times 71.695}{80}\right)$$

لدينا: $\chi^2=\dfrac{n.S^2}{\sigma^2}\to\chi^2_{(n-1)}\to\chi^2_{(15)}$ يكون:

$$P(S^2\le 71.695)=P\left(\frac{n.S^2}{\sigma^2}\le\frac{16\times 71.695}{80}\right)=P(\chi^2\le 14.339)=0.5$$

حل التمرين(09):

حساب احتمال أن يكون تباين العينة الأولى S_1^2 اكبر من ضعف تباين العينة الثانية S_2^2 :

$$P\left(S_1^2 \geq 2S_2^2\right) = P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \geq 2\right) = P\left(\frac{\frac{n_1 S_1^2}{\sigma_1^2} \Big/ (n_1-1)}{\frac{n_2 S_2^2}{\sigma_2^2} \Big/ (n_2-1)} \geq 2.\frac{\frac{n_1}{\sigma_1^2} \Big/ (n_1-1)}{\frac{n_2}{\sigma_2^2} \Big/ (n_2-1)}\right)$$

$$= P\left[F(n_1-1, n_2-1) \geq 3.7\right] = 1 - P\left[F(n_1-1, n_2-1) \leq 3.7\right]$$

$$= 1 - P\left[F(7,9) \leq 3.7\right] \approx 1 - 0.95 \approx 0.05$$

إذن احتمال أن يكون تباين العينة الأولى S_1^2 اكبر من ضعف تباين العينة الثانية S_2^2 هو: 5%

V.2 بالنسبة للتقدير واختبار الفروض

V.2.1 التمارين والمسائل

التمرين(01):

عينة عشوائية حجمها $n = 75$ سحبت من مجتمع حجمه $N = 500$ أعطت النتائج التالية:

$\overline{X} = 9.96$ ، $\sum_{i=1}^{75}(x_i - \overline{X})^2 = 393.66$

1. اوجد مجال الثقة عند حدود 95% ثم 99% لتقدير متوسط المجتمع μ ؟
2. ما احتمال أن ينتمي متوسط المجتمع μ للمجال [9.4685 ; 10.4515]؟

التمرين(02):

A/ من إنتاج مزرعة (A) لأكياس التفاح(كتب عليها الوزن الصافي 1 كغ) أخذت عينة من 15 كيس $(n_A = 15)$ وجد أن متوسط أوزانها $\overline{X}_A = 1002\ g$ وبتباين $S_A^2 = 90\ g^2$ على اعتبار أن وزن الأكياس يتوزع طبيعيا اوجد:

1. مجال الثقة عند حدود 95% لتقدير متوسط أوزان أكياس منتج هذه المزرعة μ_A ؟
2. مجال الثقة عند حدود 99% لتقدير تباين أوزان أكياس منتج هذه المزرعة σ_A^2 ؟

B/ في مزرعة أخرى (B) تملك نفس النشاط للمزرعة (A)، قمنا بأخذ عينة تضم 20 كيس$(n_B = 20)$ وجدنا أن متوسط الأوزان في هذه المزرعة $\overline{X}_B = 1005\ g$ وبتباين $S_B^2 = 90\ g^2$ على اعتبار أن وزن الأكياس يتوزع طبيعياً اوجد:

3. مجال الثقة للفرق بين متوسطي إنتاج المزرعتين $(\mu_A - \mu_B)$ عند حدود 95% ؟

4. مجال الثقة للنسبة $\left(\sigma_A^2 / \sigma_B^2\right)$ عند حدود 95% ؟

التمرين(03):

في عينة عشوائية حجمها 100 عامل لإحدى الشركات التي تضم 1200 عامل، وجدنا أن 70 عامل من هذه العينة يفضلون الاشتراك في نظام التامين الاجتماعي كأفراد بدل من الاشتراك في مشروع تامين خاص بالشركة.

- اوجد مجال الثقة عند حدود 95% لتقدير نسبة عمال الشركة الذين يفضلون نظام التامين كأفراد؟

التمرين(04):

تمتلك شركة SNP عدة مواقف للسيارات في أنحاء مختلفة من الوطن، مع التسعيرة القديمة للساعة الواحدة سجلت الشركة دخل يومي مستقر عند المتوسط 5500 دج، قررت الشركة الرفع من التسعيرة لكن التخوف كان سائدا لدى صناع القرار كون هذا الإجراء قد يؤدي إلى انخفاض الدخل اليومي للشركة بسبب انخفاض عدد العملاء، بعد تطبيق قرار الرفع من التسعير وفي ظل استقرار الطلب اختيرت عينة عشوائية تتكون من 40 يوم تبين من خلالها أن متوسط الدخل اليومي هو 5375 دج وبتباين $S^2 = 800$.

- على أساس هذه النتائج هل يمكن الإقرار بكون متوسط الدخل اليومي للشركة قد انخفض نتيجة رفع التسعيرة وهذا عند عتبة معنوية $\alpha = 0.05$ ؟

التمرين(05):

أثناء حدوث أزمة نقص المياه بمدينة الجلفة، قامت مؤسسة الجزائرية للمياه في الولاية بدراسة على عينة شملت 20 منزلاً، حيث سجلت كمية المياه المستهلكة في يوم مقدرة بالمتر المكعب وأعطت النتائج التالية:

236 240 218 223 246 180 220 235 195 265 245 175 196 248 212

238 252 208 214 228

بافتراض أن الظاهرة تتوزع طبيعياً:

1. اوجد مجال الثقة عند حدود 95% لتقدير متوسط الاستهلاك اليومي من المياه للعائلات لمدينة الجلفة؟
2. إذا علمت أن متوسط الاستهلاك اليومي قبل ألازمة كان 250 متر مكعب، هل المعطيات السابقة تؤكد حدوث أزمة بالفعل وهذا عند عتبة معنوية $\alpha = 0.05$ ؟

التمرين(06):

تقدم صاحب مؤسسة مختصة في صناعة المشروبات الغازية بمدينة الجلفة بطلب لدى المؤسسة الإذاعية السهوب بغرض عرض إعلان خاص بمنتج جديد لدى هذه المؤسسة وكانت الاتفاقية المبرمة بين الطرفين أن بث الإعلان الخاص بهذا المنتج سيكون خلال حصة نسبة المتتبعين لها أكثر من 40% من سكان الولاية، لكن صاحب المؤسسة يرى أن النسبة اقل من ذلك، في عينة عشوائية حجمها 60 مواطن من المدينة كانت نسبة المتتبعين 38% .

- بالاعتماد على نتائج العينة اختبر صحة ادعاء شبكة الإعلانات وهذا عند عتبة معنوية $\alpha = 0.01$؟

التمرين(07):

تقوم آلة في احد المصانع بتجميع منتج ما ليتم تغليفه فيما بعد، ومن الواجب مراقبة الاختلافات التي تحدث في مخرجات عملية التجميع(أي عدد الوحدات المجمعة في كل ساعة)، وذلك لان عملية التغليف تحتاج إلى تكاليف إضافية. ومع العلم أن الحد المقبول من الاختلافات المستهدفة هو $\sigma = 10$ ، ففي عينة عشوائية تضم 15 ساعة عمل للآلة أعطت انحراف معياري مصحح قدره $\hat{S} = 13.8$.

- على افتراض أن الظاهرة تتوزع طبيعيا هل يمكننا القول أن عملية التجميع تتخللها اختلافات تجاوزت الحد المقبول وهذا عند عتبة معنوية $\alpha = 0.05$؟

التمرين(08):

الجدول التالي يوضح توزيع عينة من العقارات بمدينة الجلفة حسب المساحة بالمتر المربع:

فئة المساحة	[150 ; 190[	[190 ; 230[	[230 ; 270[	[270 ; 310[	[310 ,350]
عدد العقارات	6	14	42	10	8

1. اوجد مجال الثقة عند حدود 95% لتقدير متوسط مساحة العقارات في مدينة الجلفة؟
2. اوجد مجال الثقة عند حدود 95% لتقدير تباين مساحة العقارات في مدينة الجلفة؟
3. اختبر الفرض القائل أن نسبة العقارات التي تقل مساحتها عن 230 متر مربع في مدينة الجلفة تساوي 20 % وذلك عند مستوى معنوية 5%.

التمرين(09):

من اجل التقييم والمقارنة بين مستوى أداء طلبة السنة الثانية علوم تجارية(بمتوسط μ_1 وتباين قدره σ_1^2) والبالغ عددهم 200 طالب، وطلبة السنة الثانية علوم اقتصادية(بمتوسط μ_2 وتباين قدره σ_2^2) البالغ عددهم 250 طالب في مقياس الرياضيات أجريت الدراسة الإحصائية التالية:

1. سحبنا عينة عشوائية تضم علامات 9 طلبة من العلوم التجارية أعطت متوسط قدره $\overline{X}_1 = 08.75$ وبانحراف معياري $S_1 = 1.89$ ، أما بالنسبة لتخصص العلوم الاقتصادية قمنا بسحب عينة عشوائية تضم علامات 16 طالب، أعطت متوسط قدره $\overline{X}_2 = 10.02$ وبانحراف معياري $S_2 = 1.56$ ، بافتراض أن المجتمعين يتوزعان طبيعياً ومستقلين عن بعض:

1.1. اوجد مجال الثقة عند حدود 95 % لتقدير μ_1 ، μ_2 و $(\mu_2 - \mu_1)$؟

2.1. ما احتمال أن يكون الفرق $(\mu_2 - \mu_1)$ ينتمي للمجال $]1.94 \; ; \; 2.3[$ ؟

3.1. اوجد مجال الثقة عند حدود 98 % لتقدير σ_1^2 ، σ_2^2 و $\left(\sigma_1^2 / \sigma_2^2\right)$؟

4.1. ما احتمال أن تكون النسبة $\left(\sigma_2^2 / \sigma_1^2\right)$ تنتمي للمجال $]0.1135 \; ; \; 2.5641[$ ؟

5.1. تعتقد الإدارة أن مستوى أداء الطلبة يكون مقبولاً في هذا المقياس عندما يكون معدلهم يساوي أو يفوق 9 من 20، اعتماداً على المعطيات السابقة هل يمكن الإقرار بكون مستوى أداء الطلبة في التخصصين مقبول وهذا عند عتبة معنوية $\alpha = 0.05$ ؟

2. من اجل الإحاطة أكثر بالموضوع أجريت دراسة موازية للدراسة السابقة، بحيث قمنا بأخذ عينتين عشوائيتين من علامات 60 طالب من كل تخصص، فكانت النتائج كالتالي:

- **علوم تجارية:** $\overline{X}_1 = 08.05$ ، $\widehat{S}_1 = 1.12$ و 15 طالب معدلهم لا يتجاوز 9 من 20
- **علوم اقتصادية:** $\overline{X}_2 = 09.94$ ، $\widehat{S}_2 = 1.4$

1.2. اوجد مجال الثقة عند حدود 95 % لتقدير μ_1 ، μ_2 و $(\mu_1 - \mu_2)$؟

2..2. أختبر عند عتبة معنوية $\alpha = 0.05$ وجود فرق بين معدلي طلبة التخصصين؟

3.2. أختبر عند عتبة معنوية $\alpha = 0.05$ بكون معدل طلبة العلوم التجارية أكبر من معدل طلبة العلوم الاقتصادية ؟

4.2. أختبر عند عتبة معنوية $\alpha = 0.05$ أي من الدفعتين أكثر تجانس؟ ماذا تستنتج؟

5.2. اوجد مجال الثقة عند حدود 95 % لتقدير نسبة الطلبة المقبول أداءهم في تخصص العلوم التجارية ؟

6.2. يرى مدير معهد العلوم التجارية أن نسبة الطلبة المقبول أداءهم تفوق 85 %، أختبر عند عتبة معنوية $\alpha = 0.05$ هذا الادعاء؟

V.2.2 الحلول

حل التمرين(01):

1. تقدير متوسط المجتمع μ :

لدينا: $n = 75 \succ 30$ حالة العينات الكبرى يكون: $\overline{X} \to N\left(E(\overline{X}), \sigma(\overline{X})\right)$

يكون مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ هو: $\mu \in \left[\overline{X} - Z_{1-\alpha/2}\sigma(\overline{X}) \ , \ \overline{X} + Z_{1-\alpha/2}\sigma(\overline{X})\right]$

حساب $\sigma(\overline{X})$:

لدينا:

$$n/N = 75/500 = 0.15 \succ 0.05 \qquad \sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

حالة المعاينة النفاذية يكون:

الانحراف المعياري للمجتمع σ مجهول نستعمل بدله الانحراف المعياري المصحح للعينة $\hat{S}$ يكون:

$$\sigma(\overline{X}) = \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}.\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

حساب $\hat{S}$:

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n=75}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{75-1}.393.66 = 5.32 \Rightarrow \hat{S} = \sqrt{5.32} = 2.306$$

نعوض فنجد أن:

$$\sigma(\overline{X}) = \frac{2.306}{\sqrt{75}}.\sqrt{\frac{500-75}{500-1}} = 0.246$$

أولاً عند مستوى ثقة 95%: أي عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

$$\mu \in \left[\overline{X} - Z_{0.975}\sigma(\overline{X}) \ , \ \overline{X} + Z_{0.975}\sigma(\overline{X})\right]$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow Z_{1-\alpha/2} = Z_{0.975} = 1.96$$

يكون: $Z_{1-\alpha/2}.\sigma(\overline{X}) = Z_{0.975}\sigma(\overline{X}) = 1.96 \times 0.246 = 0.48$

وعليه فان مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ هو:

$$\mu \in \left[9.96 - 0.48 \ , \ 9.96 + 0.48\right] \Rightarrow \mu \in \left[9.48 \ , \ 10.44\right]$$

وهذا بمستوى ثقة 95%.

ثانياً عند مستوى ثقة 99%: أي عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$

$$\mu \in \left[\overline{X} - Z_{0.995}\sigma(\overline{X}) \ , \ \overline{X} + Z_{0.995}\sigma(\overline{X})\right]$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow Z_{1-\alpha/2} = Z_{0.995} = 2.58$$

يكون: $Z_{1-\alpha/2}.\sigma(\bar{X}) = Z_{0.995}\sigma(\bar{X}) = 2.58 \times 0.246 = 0.635$

وعليه فان مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ هو:

$$\mu \in [9.96 - 0.635 \ , \ 9.96 + 0.635] \Rightarrow \mu \in [9.33 \ , \ 10.59]$$

وهذا بمستوى ثقة 99%.

2. حساب احتمال أن ينتمي متوسط المجتمع μ_X للمجال $[9.4685 \ ; \ 10.4515]$:

$$P(9.4685 \le \mu \le 10.4515) = P(-10.4515 \le -\mu \le -9.4685) = P\left(\frac{\bar{X} - 10.4515}{\sigma(\bar{X})} \le \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma(\bar{X})} \le \frac{\bar{X} - 9.4685}{\sigma(\bar{X})}\right)$$

$Z = \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma(\bar{X})}\right)$: هو متغير طبيعي قياسي $Z \to N(0,1)$ يكون:

$$P(9.4685 \le \mu \le 10.4515) = P(-10.4515 \le -\mu \le -9.4685) = P\left(\frac{\bar{X} - 10.4515}{\sigma(\bar{X})} \le \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma(\bar{X})} \le \frac{\bar{X} - 9.4685}{\sigma(\bar{X})}\right)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - 10.4515}{\sigma(\bar{X})} \le Z \le \frac{\bar{X} - 9.4685}{\sigma(\bar{X})}\right) = P\left(\frac{9.96 - 10.4515}{0.246} \le Z \le \frac{9.96 - 9.4685}{0.246}\right)$$

$$\cong P(-2 \le Z \le 2) = 2 \times P(Z \le 2) - 1 \cong 2 \times 0.9772 - 1 = 0.9544$$

حل التمرين(02):

بالنسبة للفرع A :

1. تقدير متوسط المجتمع μ_A عند مستوى ثقة 95%:

لدينا: $n_A = 15 \prec 30$ حالة العينات الصغرى يكون: $\frac{\bar{X}_A - \mu_A}{\sigma(\bar{X}_A)} \to t^{n_A - 1}$

يكون مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ_A هو: $\mu_A \in \left[\bar{X}_A - t^{n_A-1}_{1-\alpha/2}\sigma(\bar{X}_A) \ , \ \bar{X}_A + t^{n_A-1}_{1-\alpha/2}\sigma(\bar{X}_A)\right]$

حساب $\sigma(\bar{X}_A)$:

لدينا:المجتمع غير محدود يكون $0 \prec 0.05 \to {n_A}/{N_A} = {15}/{N_A}$ حالة المعاينة غير النفاذية يكون:

$$\sigma(\bar{X}_A) = \frac{\sigma_A}{\sqrt{n_A}}$$

الانحراف المعياري للمجتمع σ_A مجهول نستعمل بدله الانحراف المعياري المصحح للعينة $\hat{S}_A$ يكون:

$$\sigma(\bar{X}_A) = \frac{\hat{S}_A}{\sqrt{n_A}}$$

حساب $\hat{S}_A$:

$$\hat{S}_A^2 = \frac{1}{n_A - 1}\sum_{i=1}^{15}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{n_A}{n_A - 1}.\left[\frac{1}{n_A}\sum_{i=1}^{15}\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right] = \frac{n_A}{n_A - 1}S_A^2 = \frac{15}{14}.90 = 96.43$$

$$\Rightarrow \widehat{S}_A = \sqrt{96.43} = 9.82$$

نعوض فنجد ان: $\sigma\left(\overline{X}_A\right) = \frac{9.82}{\sqrt{15}}. \cong 2.54$

عند مستوى ثقة 95% أي عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

$$\mu_A \in \left[\overline{X}_A - t_{0.975}^{14}\sigma\left(\overline{X}_A\right),\ \overline{X}_A + t_{0.975}^{14}\sigma\left(\overline{X}_A\right)\right]$$

$\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{0.975}^{14} = 2.145$ يكون: $t_{0.975}^{14}\sigma\left(\overline{X}_A\right) = 2.145 \times 2.54 = 5.44$

نعوض في مجال التقدير فنجد ان: $\mu_A \in [996.56\ ,\ 1007.44]$ وهذا بمستوى ثقة 95%

2. تقدير تباين المجتمع σ_A عند مستوى ثقة 99%:

مجال الثقة لتباين المجتمع σ_A^2 هو: $\sigma_A^2 \in \left[\frac{(n_A - 1)\widehat{S}_A^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n_A - 1)}\ ,\ \frac{(n_A - 1)\widehat{S}_A^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n_A - 1)}\right]$

ولدينا: $(n_A - 1).\widehat{S}_A^2 = 14 \times 96.43 = 1350.02$

وبمستوى ثقة 99% يكون: $\alpha = 0.01 \Rightarrow \begin{cases}\chi_{\alpha/2}^2(n_A - 1) = \chi_{0.005}^2(14) = 4.075\\ \chi_{1-\alpha/2}^2(n_A - 1) = \chi_{0.995}^2(14) = 31.319\end{cases}$

نعوض في مجال التقدير نجد أن: $\sigma_A^2 \in \left[\frac{1350.02}{31.319}\ ,\ \frac{1350.02}{4.075}\right] \Rightarrow \sigma_A^2 \in [43.11,\ 331.3]$

وهذا بمستوى ثقة 99%.

بالنسبة للفرع B:

3. تقدير الفرق بين متوسطي إنتاج المزرعتين $(\mu_A - \mu_B)$ عند مستوى الثقة 95%:

لدينا: $n_A = 15, n_B = 20 \prec 30$ حالة العينات الصغرى يكون توزيع الفرق هو:

$$\frac{\left(\overline{X}_A - \overline{X}_B\right) - \left(\mu_A - \mu_B\right)}{\sigma\left(\overline{X}_A - \overline{X}_B\right)} \rightarrow t^{(n_A + n_B) - 2}$$

يكون مجال الثقة للفرق $\left(\overline{X}_A - \overline{X}_B\right)$ هو:

$$\left(\mu_A - \mu_B\right) \in \left[\left(\overline{X}_A - \overline{X}_B\right) - t_{1-\alpha/2}^{(n_A+n_B)-2}\sigma\left(\overline{X}_A - \overline{X}_B\right),\ \left(\overline{X}_A - \overline{X}_B\right) + t_{1-\alpha/2}^{(n_A+n_B)-2}\sigma\left(\overline{X}_A - \overline{X}_B\right)\right]$$

حساب الفرق $\left(\overline{X}_A - \overline{X}_B\right)$: $\left(\overline{X}_A - \overline{X}_B\right) = 1002 - 1005 = -3$

حساب $\sigma\left(\overline{X}_A - \overline{X}_B\right)$:

$$\sigma\left(\overline{X}_A - \overline{X}_B\right) = \sqrt{\sigma^2\left(\overline{X}_X\right) + \sigma^2\left(\overline{X}_B\right)}$$

حساب $\sigma(\overline{X}_B)$: لدينا المجتمع غير محدود يكون $n_B/N_B = 20/N_B \to 0 \prec 0.05$ حالة المعاينة غير النفاذية يكون:

$$\sigma(\overline{X}_B) = \frac{\sigma_B}{\sqrt{n_B}}$$

الانحراف المعياري للمجتمع σ_B مجهول نستعمل بدله الانحراف المعياري المصحح للعينة $\hat{S}_B$ يكون:

$$\sigma(\overline{X}_B) = \frac{\hat{S}_B}{\sqrt{n_B}}$$

حساب $\hat{S}_B$:

$$\hat{S}_B^2 = \frac{1}{n_B - 1}\sum_{i=1}^{15}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{n_B}{n_B - 1}.\left[\frac{1}{n_B}\sum_{i=1}^{20}(X_i - \overline{X})^2\right] = \frac{n_B}{n_B - 1}S_B^2 = \frac{20}{19}.90 = 94.74$$

$$\Rightarrow \hat{S}_B = \sqrt{94.74} = 9.73$$

نعوض فنجد ان: $\sigma(\overline{X}_A) = \frac{9.73}{\sqrt{20}}. \cong 2.176$

يكون تباين الفرق $\sigma(\overline{X}_A - \overline{X}_B)$ هو:

$$\sigma(\overline{X}_A - \overline{X}_B) = \sqrt{\sigma^2(\overline{X}_X) + \sigma^2(\overline{X}_B)} = \sqrt{(2.54)^2 + (2.176)^2} = 3.34$$

وبمستوى ثقة 95% يكون: $\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{1-\alpha/2}^{(n_A+n_B)-2} = t_{0.975}^{33} \cong 2.042$

ملاحظة: في جدول توزيع ستيودنت لا توجد درجة الحرية 33 نأخذ الأقرب و هي 30

يكون: $t_{1-\alpha/2}^{(n_A+n_B)-2}\sigma(\overline{X}_A - \overline{X}_B) = 2.042 \times 3.34 = 6.82$

نعوض في مجال التقدير فنجد ان:

$$(\mu_A - \mu_B) \in [-3 - 6.82\ ,\ -3 + 6.82] \Rightarrow (\mu_A - \mu_B) \in [-9.82\ ,\ 3.82]$$

وهذا بمستوى ثقة 95%.

4. مجال الثقة للنسبة $\left(\sigma_A^2/\sigma_B^2\right)$ عند حدود 95%:

من خلال نتائج الفصل السابق لتوزيع المعاينة لنسبة تباينين $\left(\hat{S}_A^2/\hat{S}_B^2\right)$ تحصلنا على توزيع المعاينة على الشكل التالي:

$$F=\frac{\left(\frac{(n_A-1)\widehat{S}_A^2}{\sigma_A^2}\right)\Big/(n_A-1)}{\left(\frac{(n_B-1)\widehat{S}_B^2}{\sigma_B^2}\right)\Big/(n_B-1)}=\frac{\widehat{S}_A^2/\sigma_A^2}{\widehat{S}_A^2/\sigma_A^2}\rightarrow F(n_A-1,n_B-1)$$

فبمستوى ثقة $(1-\alpha)$ يكون:

$$\left(\sigma_A^2/\sigma_B^2\right)\in\left[\frac{\widehat{S}_A^2/\widehat{S}_B^2}{F_{(1-\alpha/2)}(n_A-1,n_B-1)}\ ,\ \frac{\widehat{S}_A^2/\widehat{S}_B^2}{F_{(\alpha/2)}(n_A-1,n_B-1)}\right]$$

وهذا بمستوى ثقة $(1-\alpha)$.

ولدينا: $\widehat{S}_A^2/\widehat{S}_B^2=96.43/94.74=1.02$

وعند مستوى ثقة $(1-\alpha)=0.95$ يكون:

$$\alpha=0.05\Rightarrow F_{1-\alpha/2}(n_A-1,n_B-1)=F_{0.975}(14,19)=2.62$$

$$\alpha=0.05\Rightarrow F_{\alpha/2}(n_A-1,n_B-1)=F_{0.025}(14,19)=\left[F_{(1-0.025)}(19,14)\right]^{-1}$$
$$=\frac{1}{F_{0.975}(19,14)}=\frac{1}{2.84}=0.35$$

نعوض في مجال التقدير فنجد ان:

$$\left(\sigma_A^2/\sigma_B^2\right)\in\left[\frac{1.02}{2.62}\ ,\ \frac{1.02}{0.35}\right]\Rightarrow\left(\sigma_A^2/\sigma_B^2\right)\in[0.39\ ,\ 2.91]$$

وهذا بمستوى ثقة 95%.

حل التمرين(03):

نرمز بـ N,n حجم العينة وحجم المجتمع على التوالي؛

نرمز بـ P لنسبة عمال الشركة الذين يفضلون نظام التامين كأفراد؛

نرمز بـ X لعدد العمال ضمن العينة الذين يفضلون نظام التامين كأفراد؛

نرمز بـ r لنسبة العمال ضمن العينة الذين يفضلون نظام التامين كأفراد.

تقدير نسبة عمال الشركة الذين يفضلون نظام التامين كأفراد عند مستوى الثقة 95%:

لدينا: $n=100\succ 30$ حالة العينات الكبرى توزيع r هو: $r\rightarrow N(P,\sigma(r))$

و عليه فان مجال الثقة لـ P هو: $P \in \left[r - Z_{1-\alpha/2}\sigma(r), r + Z_{1-\alpha/2}\sigma(r)\right]$

حساب $\sigma(r)$:

لدينا: $n/N = 100/1200 = 0.083 \succ 0.05$ أي حالة المعاينة النفاذية ويكون:

$$\sigma(r) = \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

ولدينا كذلك: $r = \frac{X}{n} = \frac{70}{100} = 0.70$ نعوض فنجد ان:

$$\sigma(r) = \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\frac{0.70\times(1-0.70)}{100}}\sqrt{\frac{1200-100}{1200-1}} = 0.044$$

عند مستوى الثقة 95% يكون: $\alpha = 0.05 \Rightarrow Z_{1-\alpha/2} = Z_{0.975} = 1.96$

أي أن: $Z_{1-\alpha/2}\sigma(r) = 1.96\times 0.044 = 0.086$

يكون مجال الثقة هو:

$$P \in \left[0.70 - 0.086\ ,\ 0.70 + 0.086\right] \Rightarrow P \in \left[0.62,\ 0.79\right]$$

وهذا بمستوى ثقة 95%.

أي ان نسبة عمال الشركة الذين يفضلون نظام التامين كأفراد تتراوح بين 62% و 79% وهذا بمستوى ثقة 95%.

حل التمرين(04):

لدينا: $\mu_0 = 5500$ يمثل الدخل اليومي للشركة مع التسعيرة القديمة للساعة الواحدة؛

$\overline{X} = 5375$ متوسط العينة وهو يمثل الدخل اليومي للشركة خلال 40 يوم المأخوذة مع التسعيرة الجديدة للساعة الواحدة؛

$n = 40$: حجم العينة، $n = 40 \succ 30$ حالة العينات الكبرى

صياغة الفرضية المعدومة H_0 للاختبار و الفرضية البديلة H_1:

$$H_0 : \mu \le 5500 \qquad \underline{vs} \qquad H_1 : \mu \succ 5500$$

هذه الحالة توافق اختبار أحادي الطرف من اليمين

فبمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ يكون:

ونكتب: $P\left[\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma(\overline{X})} \le Z_T = Z_{(0.95)}\right] = 0.95$

الإحصائية المجدولة: $Z_T = Z_{(0.95)} = 1.96$

الإحصائية المحسوبة للاختبار: $Z_C = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma(\overline{X})}$

حساب $\sigma(\overline{X})$:

لدينا المجتمع غير محدود أي أن المعاينة غير نفاذية، يكون: $\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{\widehat{S}}{\sqrt{n}}$

الانحراف المصحح للعينة: $\widehat{S} = \sqrt{\dfrac{n}{n-1}}.S = \sqrt{\dfrac{40}{40-1}}.\sqrt{800} = 28.64$

نعوض فنجد أن: $\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\widehat{S}}{\sqrt{n}} = \dfrac{28.64}{\sqrt{40}} = 4.53$

تكون قيمة الإحصائية المحسوبة للاختبار هي:

$$Z_C = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma(\overline{X})} = \frac{5375 - 5500}{4.53} = -27.6$$

قاعدة القرار:

نلاحظ أن: $Z_C = -27.6 \leq Z_T = 1.96$

أي أن Z_C ينتمي إلى منطقة قبول H_0 وعليه فإننا نقبل H_0 بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$، ونقول عندئذ أن متوسط المجتمع اقل أو يساوي القيمة $\mu_0 = 5500$ و هذا على ضوء هذه العينة و بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$. و يمكننا عندئذ الإقرار بكون متوسط الدخل اليومي للشركة قد انخفض نتيجة رفع التسعيرة وهذا عند عتبة معنوية $\alpha = 0.05$؟

حل التمرين(05):

نرمز بـ N, n حجم العينة وحجم المجتمع على التوالي؛

نرمز بـ μ لمتوسط الاستهلاك اليومي من المياه للعائلات بمدينة الجلفة؛

نرمز بـ $\overline{X}$ لمتوسط الاستهلاك اليومي من المياه للعائلات ضمن العينة المأخوذة 20 منزل؛

1. تقدير متوسط الاستهلاك اليومي من المياه للعائلات لمدينة الجلفة عند مستوى ثقة 95%:

لدينا: $n = 20 \prec 30$ حالة العينات الصغرى يكون: $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma(\overline{X})} \rightarrow t^{n-1}$

يكون مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ هو: $\left[\overline{X} - t^{n-1}_{1-\alpha/2}\sigma(\overline{X}) \ , \ \overline{X} + t^{n-1}_{1-\alpha/2}\sigma(\overline{X})\right]$ $\mu \in$

حساب متوسط العينة $\overline{X}$: $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{20} X_i = 223.7$

حساب $\sigma(\overline{X})$: لدينا:المجتمع غير محدود يكون $n/N = 20/N \rightarrow 0 \prec 0.05$ حالة المعاينة غير النفاذية يكون:

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

الانحراف المعياري للمجتمع σ مجهول نستعمل بدله الانحراف المعياري المصحح للعينة $\hat{S}$ يكون:

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}$$

حساب $\hat{S}$:

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{20}(X_i - \bar{X})^2 = 590.12 \Rightarrow \hat{S} = 24.3$$

نعوض فنجد ان:

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{24.3}{\sqrt{20}}. \cong 5.45$$

عند مستوى ثقة 95% أي عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

$$\mu_A \in \left[\bar{X}_A - t^{19}_{0.975}\sigma(\bar{X}_A)\ ,\ \bar{X}_A + t^{19}_{0.975}\sigma(\bar{X}_A)\right]$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow t^{19}_{0.975} = 2.093$$

يكون:

$$t^{19}_{0.975}\sigma(\bar{X}_A) = 2.093 \times 5.45 = 11.48$$

نعوض في مجال التقدير فنجد أن: $\mu_A \in [223.7 - 11.48\ ,\ 223.7 + 11.48]$

ومنه: $\mu_A \in [212.22\ ,\ 235.18]$ وهذا بمستوى ثقة 95%

2. اختبار إذا علمنا أن متوسط الاستهلاك اليومي قبل ألازمة كان 250 متر مكعب، فهل المعطيات السابقة تؤكد حدوث أزمة بالفعل وهذا عند عتبة معنوية $\alpha = 0.05$ ؟ يعني اختبار متوسط الاستهلاك اليومي هل انخفض عن 250 متر مكعب.

وتكون صياغته على النحو التالي: $H_0 : \mu \geq 250$ $\underline{vs}$ $H_1 : \mu \prec 250$

هذه الحالة توافق اختبار أحادي الطرف من اليسار. فعلى أساس الفرضية المعدومة H_0 لا توجد أزمة.

حجم العينة $n = 20 \prec 30$ أي حالة العينات الصغيرة: $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma(\bar{X})} \rightarrow t^{(n-1)}$

فبمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ يكون:

ونكتب: $$P\left[\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma(\bar{X})} \geq T_T = t_\alpha^{(n-1)}\right] = 1 - \alpha$$

الإحصائية المجدولة: $$T_T = t^{(20-1)}_{0.05} = -t^{19}_{0.95} = -1.729$$

الإحصائية المحسوبة للاختبار: $$T_C = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma(\bar{X})} = \frac{223.7 - 250}{5.45} = -4.82$$

قاعدة القرار:

نلاحظ أن: $T_C = -4.82 \prec T_T = -1.729$

أي أن T_C ينتمي إلى منطقة رفض H_0 ، وعليه نرفض H_0 ونقبل H_1 بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$. ونقول عندئذ أن متوسط الاستهلاك اليومي للمياه اقل من القيمة $\mu_0 = 250$ فعلى ضوء هذه العينة يمكننا الإقرار بحدوث أزمة وهذا بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

حل التمرين(06):

نرمز بـ N, n حجم العينة وحجم المجتمع على التوالي؛

نرمز بـ P لنسبة المتتبعين للحصة التي يبث الإعلان الخاص بهذا المنتج فيها؛

نرمز بـ P_0 للنسبة المتفق عليها: P_0 =40%؛

نرمز بـ r لنسبة المتتبعين للحصة التي يبث الإعلان الخاص بهذا المنتج فيها ولكن ضمن العينة فقط.

يكون، r =38%.

على أساس نتائج هذه العينة نريد اختبر صحة ادعاء شبكة الإعلانات وهذا عند عتبة معنوية $\alpha = 0.01$:

أي أننا نريد اختبر النسبة P هل هي اكبر أو تساوي P_0 =40%. هذه الحالة توافق اختبار أحادي الطرف من اليسار، وتكون صياغته على النحو التالي: $H_0 : P \geq 0.40$ $\underline{vs}$ $H_1 : P \prec 0.40$

لدينا: $n = 60 \geq 30$ حالة العينات الكبرى يكون توزيع النسبة المدروسة في العينة r هو: $\frac{r-P}{\sigma(r)} \to N(0,1)$

فبمستوى معنوية $\alpha = 0.01$ يكون: $P\left[\frac{r-P}{\sigma(r)} \geq Z_T = Z_\alpha\right] = 1-\alpha$

الإحصائية المجدولة: $Z_T = Z_\alpha = -Z_{(1-\alpha)} = -Z_{0.99} = -2.33$

الإحصائية المحسوبة للاختبار: $Z_C = \frac{r-P_0}{\sigma(r)}$

حساب $\sigma(r)$:

لدينا المجتمع غير محدود أي أن المعاينة غير نفاذية، يكون: $\sigma(r) = \sqrt{\frac{r.(1-r)}{n}} = \sqrt{\frac{0.38.(1-0.38)}{60}} = 0.063$

نعوض فنجد أن قيمة الإحصائية المحسوبة للاختبار: $Z_C = \frac{r-P_0}{\sigma(r)} = \frac{0.38-0.40}{0.063} = -0.319$

قاعدة القرار:

نلاحظ أن: $Z_C = -0.319 \geq Z_T = -2.33$ نقبل H_0 بمستوى معنوية $\alpha = 0.01$ ، ونقول عندئذ أن نسبة الصفة في المجتمع P اكبر أو تساوي القيمة P_0 =40% وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية $\alpha = 0.01$. وعليه يمكننا الإقرار بان ادعاء شبكة الإعلانات صحيح.

حل التمرين (07):

نريد اختبار الفرضية التالية: هل تباين المجتمع σ^2 اقل أو يساوي القيمة $\sigma_0^2 = 100$؟ هذه الحالة توافق اختبار أحادي الطرف من اليمين، وتكون صياغته على النحو التالي: $H_0: \sigma^2 \leq 100 \quad \underline{vs} \quad H_1: \sigma^2 \succ 100$

حجم العينة $n = 15 \prec 100$ غير ان وحدات المجتمع الأصلي تتبع التوزيع الطبيعي يكون توزيع المعاينة للتباين المصحح للعينة $\widehat{S}^2$ هو: $\chi^2 = \frac{(n-1).\widehat{S}^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi^2_{(n-1)}$

فبمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ يكون: $P\left[\frac{(n-1).\widehat{S}^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{(1-\alpha)}(n-1)\right] = 0.95$

الإحصائية المجدولة: $\chi^2_T = \chi^2_{(1-\alpha)}(n-1) = \chi^2_{0.95}(14) = 23.685$

الإحصائية المحسوبة للاختبار: $\chi^2_C = \frac{(n-1).\widehat{S}^2}{\sigma_0^2} = \frac{14 \times (13.8)^2}{100} = 26.66$

قاعدة القرار:

نلاحظ أن: $\chi^2_C = 26.66 \geq \chi^2_T = \chi^2_{0.95}(14) = 23.685$ نرفض H_0 بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ و نقبل H_1، ونقول عندئذ أن تباين المجتمع σ^2 اكبر من القيمة $\sigma_0^2 = 100$ أي أن عملية التجميع تتخللها اختلافات تجاوزت الحد المقبول وهذا على ضوء هذه العينة و بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

حل التمرين(08):

1. تقدير متوسط مساحة العقارات μ في مدينة الجلفة عند مستوى الثقة 95% :

لدينا: $n = 80 \succ 30$ حالة العينات الكبرى يكون:

$$\overline{X} \rightarrow N\left(E(\overline{X}), \sigma(\overline{X})\right)$$

يكون مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ هو:

$$\mu \in \left[\overline{X} - Z_{1-\alpha/2}\sigma(\overline{X}) \ , \ \overline{X} + Z_{1-\alpha/2}\sigma(\overline{X})\right]$$

حساب $\sigma(\overline{X})$:

لدينا: المجتمع غير محدود $n/N = 80/N \rightarrow 0 \prec 0.05$ حالة المعاينة غير النفاذية يكون: $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ والانحراف المعياري للمجتمع σ مجهول نستعمل بدله الانحراف المعياري المصحح للعينة $\hat{S}$ يكون:

$$\sigma(\overline{X}) = \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}$$

حساب: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} n_i . X_i$ ، $\widehat{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{5} n_i . \left(X_i - \overline{X}\right)^2$

الجدول التالي يوضح كيفية حساب $\sum_{i=1}^{5} n_i.\left(X_i-\bar{X}\right)^2$ و $\sum_{i=1}^{5} n_i.X_i$

فئة المساحة	n_i	X_i	$n_i.X_i$	$n_i.\left(X_i-\bar{X}\right)^2$
[150,190[	06	170	1020	38400
[190,230[	14	210	2940	22400
[230,270[	42	250	10500	0
[270,310[	10	290	2900	16000
[310,350[	08	330	2640	51200
المجموع	80	/	20000	128000

يكون: $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} n_i.X_i=\frac{20000}{80}=250$

يكون: $\hat{S}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{5} n_i.\left(X_i-\bar{X}\right)^2=\frac{128000}{79}=1620.25\Rightarrow \hat{S}=40.25$

$\sigma\left(\bar{X}\right)=\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}=\frac{40.25}{\sqrt{80}}=4.5$

عند مستوى ثقة 95%: $\alpha=0.05\Rightarrow Z_{1-\alpha/2}=Z_{0.975}=1.96$ يكون: $Z_{1-\alpha/2}.\sigma\left(\bar{X}\right)=Z_{0.975}\sigma\left(\bar{X}\right)=1.96\times 4.5=8.82$

نعوض فنجد أن مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ هو:

$$\mu\in\left[250-8.82\ ,\ 250+8.82\right]\Rightarrow \mu\in\left[241.18\ ,\ 258.82\right]$$

وهذا بمستوى ثقة 95%.

2. تقدير تباين مساحة العقارات في مدينة الجلفة σ^2 عند مستوى الثفة 95%:

من خلال نتائج الفصل السابق لتوزيع المعاينة للتباينات تحصلنا على توزيع المعاينة للتباين المصحح $\hat{S}^2$ على الشكل التالي: $\frac{(n-1).\hat{S}^2}{\sigma^2}\rightarrow \chi^2_{(n-1)}$

فبمستوى ثقة $(1-\alpha)$ مجال الثقة لتباين المجتمع σ^2 هو: $\sigma^2\in\left[\frac{(n-1).\hat{S}^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2)}(n-1)}\ ,\ \frac{(n-1).\hat{S}^2}{\chi^2_{(\alpha/2)}(n-1)}\right]$

وهذا بمستوى ثقة $(1-\alpha)$.

لدينا: $(n-1).\hat{S}^2=79\times 1620.25=128000$

بمستوى ثقة $(1-\alpha)=0.95$: $\alpha=0.05\Rightarrow\begin{cases}\chi^2_{1-\alpha/2}(n\ -1)=\chi^2_{0..975}(14)=106.6\\ \chi^2_{\alpha/2}(n\ -1)=\chi^2_{0.025}(14)=57.2\end{cases}$

نعوض في مجال التقدير نجد أن:

$$\sigma^2 \in \left[\frac{128000}{106.6}\ ,\ \frac{128000}{57.2}\right] \Rightarrow \sigma^2 \in \left[1200.75,\ 2237.76\right]$$

وهذا بمستوى ثقة 95%.

3. اختبار ان نسبة العقارات في مدينة الجلفة التي تقل مساحتها عن 230 متر مربع هي 20 % وهذا عند مستوى معنوية 5%:

نرمز بـ P لنسبة العقارات في مدينة الجلفة التي تقل مساحتها عن 230 متر مربع.

نرمز بـ r لنسبة العقارات في العينة التي تقل مساحتها عن 230 متر مربع.

وتكون صياغة الاختبار على النحو التالي: $H_0 : P = 0.20 \ \ \underline{vs} \ \ H_1 : P \neq 0.20 \ \ (P \prec 0.20 \ \vee \ P \succ 0.20)$

وهذه الحالة توافق اختبار ثنائي الطرف. حجم العينة $n = 80 \succ 30$ حالة العينات الكبرى يكون توزيع المعاينة للنسبة المدروسة في العينة r هو: $\frac{r-P}{\sigma(r)} \to N(0,1)$

فبمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ يكون: $P\left[-Z_{0.975} \le \frac{r-P}{\sigma(r)} \le Z_{0.975}\right] = 0.95$

الإحصائية المحسوبة للاختبار: $Z_C = \frac{r-P_0}{\sigma(r)}$

نحسب r نسبة العقارات في العينة التي تقل مساحتها عن 230 متر مربع: $r = \frac{6+14}{80} = 0.25$

حساب $\sigma(r)$: $\sigma(r) = \sqrt{\frac{0.25 \times (1-0.25)}{80}} = 0.048$

تكون قيمة الإحصائية المحسوبة للاختبار: $Z_C = \frac{r-P_0}{\sigma(r)} = \frac{0.25-0.20}{0.048} = 1.032$

أما الإحصائية المجدولة للاختبار تتمثل في المجال: $\left[-Z_{0.975}\ ,\ Z_{0.975}\right] \equiv \left[-1.96,\ 1.96\right]$

قاعدة القرار:

نلاحظ ان: $Z_C = 1.032 \in \left[-1.96\ ,\ 1.96\right]$ نقبل H_0 بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$، ونقول عندئذ أن نسبة العقارات في مدينة الجلفة التي تقل مساحتها عن 230 متر مربع تساوي القيمة $P_0 = 0.20$ وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

حل التمرين(09):

المجتمع(1): طلبة السنة الثانية علوم تجارية

$N_1 = 200, \mu_1, \sigma_1$: تمثل حجم المجتمع، متوسط المجتمع وانحراف المجتمع على التوالي؛

$n_1, \overline{X}_1, S_1$: تمثل حجم العينة، متوسط العينة وانحراف العينة على التوالي؛

وحدات المجتمع أي علامات الطلاب في مقياس الرياضيات تتبع التوزيع الطبيعي.

المجتمع(2): طلبة السنة الثانية علوم اقتصادية

$N_2 = 250, \mu_2, \sigma_2$: تمثل حجم المجتمع، متوسط المجتمع وانحراف المجتمع على التوالي؛

$n_2, \overline{X}_2, S_2$: تمثل حجم العينة، متوسط العينة وانحراف العينة على التوالي.

وحدات المجتمع أي علامات الطلاب في مقياس الرياضيات تتبع التوزيع الطبيعي.

1. بالنسبة لهذا الفرع: $n_1 = 9, n_2 = 16 \prec 30$ حالة العينات الصغرى

العينة(1): طلبة السنة الثانية علوم تجارية

$n_1 = 9, \overline{X}_1 = 8.75, S_1 = 1.89$: تمثل حجم العينة، متوسط العينة وانحراف العينة على التوالي.

العينة(2): طلبة السنة الثانية علوم اقتصادية

$n_2 = 16, \overline{X}_2 = 10.02, S_2 = 1.56$: تمثل حجم العينة، متوسط العينة وانحراف العينة على التوالي.

1.1. تقدير μ_1 ، μ_2 و $(\mu_2 - \mu_1)$:

- تقدير متوسط طلبة السنة الثانية علوم تجارية μ_1:

لدينا: $n_1 = 9 \prec 30$ حالة العينات الصغرى وحدات المجتمع أي علامات الطلاب في مقياس الرياضيات تتبع التوزيع الطبيعي وبانحراف σ_1 مجهول، يكون توزيع المعاينة لمتوسط العينة $\overline{X}_1$ هو توزيع ستيودنت:

$$\frac{\overline{X}_1 - \mu_1}{\sigma(\overline{X}_1)} \to t^{(n_1-1)}$$

فبمستوى ثقة $(1-\alpha)$ يكون مجال التقدير لـ μ_1 هو:

$$\mu_1 \in \left[\overline{X}_1 - t^{(n_1-1)}_{(1-\alpha/2)}\sigma(\overline{X}_1),\ \overline{X}_1 + t^{(n_1-1)}_{(1-\alpha/2)}\sigma(\overline{X}_1)\right]$$

حساب $\sigma(\overline{X}_1)$:

لدينا: $n_1/N_1 = 9/200 = 0.045 \prec 0.05$ أي حالة المعاينة غير النفاذية يكون: $\sigma(\overline{X}_1) = \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}} = \frac{\hat{S}_1}{\sqrt{n_1}}$

حساب $\hat{S}_1$: $\hat{S}_1 = \sqrt{\frac{n_1}{n_1 - 1}}.S_1 = \sqrt{\frac{9}{9-1}}.1.89 = 2.005$

نعوض فنجد أن: $\sigma(\overline{X}_1) = \frac{\hat{S}_1}{\sqrt{n_1}} = \frac{2.005}{\sqrt{9}} = 0.67$

بمستوى ثقة $(1-\alpha) = 0.95$ يكون: $(1-\alpha) = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow t^{(n_1-1)}_{(1-\alpha/2)} = t^8_{0.975} = 2.306$

يكون: $t^{(n_1-1)}_{(1-\alpha/2)}\sigma(\overline{X}_1) = t^8_{0.975}.\sigma(\overline{X}_1) = 2.306 \times 0.67 = 1.54$

نعوض في مجال التقدير لـ μ_1 فنجد أن:

$$\mu_1 \in [8.75-1.54\ ,\ 8.75+1.54] \Rightarrow \mu_1 \in [7.21\ ,\ 10.29]$$

وهذا بمستوى ثقة 95 %.

• تقدير متوسط طلبة السنة الثانية علوم اقتصادية μ_2 :

لدينا: $n_2 = 16 \prec 30$ حالة العينات الصغرى وحدات المجتمع أي علامات الطلاب في مقياس الرياضيات تتبع التوزيع الطبيعي وبانحراف σ_2 مجهول، فبمستوى ثقة $(1-\alpha)$ يكون مجال التقدير لـ μ_1 هو:

$$\mu_2 \in \left[\bar{X}_2 - t_{(1-\alpha/2)}^{(n_2-1)}\sigma(\bar{X}_2),\ \bar{X}_2 + t_{(1-\alpha/2)}^{(n_2-1)}\sigma(\bar{X}_2)\right]$$

حساب $\sigma(\bar{X}_2)$:

لدينا: $n_2/N_2 = 16/250 = 0.064 \succ 0.05$ أي حالة المعاينة غير النفاذية يكون:

$$\sigma(\bar{X}_2) = \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}}\sqrt{\frac{N_2-n_2}{N_2-1}} = \frac{\hat{S}_2}{\sqrt{n_2}}\sqrt{\frac{N_2-n_2}{N_2-1}}$$

حساب $\hat{S}_2$: $\hat{S}_2 = \sqrt{\frac{n_2}{n_2-1}}.S_2 = \sqrt{\frac{16}{16-1}}.1.56 = 1.61$

نعوض فنجد أن: $\sigma(\bar{X}_2) = \frac{\hat{S}_2}{\sqrt{n_2}}\sqrt{\frac{N_2-n_2}{N_2-1}} = \frac{1.61}{\sqrt{16}}.\sqrt{\frac{250-16}{250-1}} = 0.39$

بمستوى ثقة $(1-\alpha)=0.95$ يكون: $(1-\alpha)=0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow t_{(1-\alpha/2)}^{(n_2-1)} = t_{0.975}^{15} = 2.131$

يكون: $t_{(1-\alpha/2)}^{(n_2-1)}\sigma(\bar{X}_2) = t_{0.975}^{15}.\sigma(\bar{X}_2) = 2.131 \times 0.39 = 0.83$

نعوض في مجال التقدير لـ μ_1 فنجد أن:

$$\mu_2 \in [10.02-0.83\ ,\ 10.02+0.83] \Rightarrow \mu_2 \in [9.19\ ,\ 10.85]$$

وهذا بمستوى ثقة 95 %.

• تقدير الفرق $(\mu_2 - \mu_1)$:

لدينا: $n_1 = 9, n_2 = 16 \prec 30$ حالة العينات الصغرى ووحدات المجتمعين أي علامات الطلاب في مقياس الرياضيات تتبع التوزيع الطبيعي وبانحراف σ_1, σ_2 مجهولين، فبمستوى ثقة $(1-\alpha)$ يكون مجال التقدير لـ μ_1 هو:

$$(\mu_2-\mu_1) \in \left[(\bar{X}_2-\bar{X}_1) - t_{(1-\alpha/2)}^{(n_1+n_2-2)}\sigma(\bar{X}_2-\bar{X}_1)\ ,(\bar{X}_2-\bar{X}_1) + t_{(1-\alpha/2)}^{(n_1+n_2-2)}\sigma(\bar{X}_2-\bar{X}_1)\right]$$

حساب $(\bar{X}_2-\bar{X}_1)$: $(\bar{X}_2-\bar{X}_1) = 10.02-8.75 = 1.27$

حساب $\sigma(\bar{X}_2-\bar{X}_1)$: $\sigma(\bar{X}_2-\bar{X}_1) = \sqrt{\sigma^2(\bar{X}_1)+\sigma^2(\bar{X}_2)} = \sqrt{(0.67)^2+(0.39)^2} \cong 0.78$

بمستوى ثقة $(1-\alpha)=0.95$ يكون: $(1-\alpha)=0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow t_{(1-\alpha/2)}^{(n_1+n_2-2)} = t_{0.975}^{23} = 2.069$

يكون: $t_{(1-\alpha/2)}^{(n_1+n_2-2)}\sigma(\overline{X}_1-\overline{X}_2)=t_{0.975}^{23}.\sigma(\overline{X}_1-\overline{X}_2)=2.069\times 0.78=1.61$

نعوض في مجال التقدير لـ $(\mu_2-\mu_1)$ فنجد أن:

$$(\mu_2-\mu_1)\in[1.27-1.61\ ,\ 1.27+1.61]\Rightarrow(\mu_2-\mu_1)\in[-0.34\ ,\ 2.88]$$

وهذا بمستوى ثقة 95 %.

2.1. حساب احتمال أن يكون الفرق $(\mu_2-\mu_1)$ ينتمي للمجال $[1.94\ ;\ 2.3]$:

$$P(1.94\le\mu_2-\mu_1\le 2.3)=P(-2.3\le-(\mu_2-\mu_1)\le-1.94)$$

نحدث بعض التعديلات على المتراجحة داخل الاحتمال وذلك من اجل الوصول إلى توزيع الفرق والمعلوم مسبقاً وهو توزيع ستيودنت، يكون:

$$P(1.94\le\mu_2-\mu_1\le 2.3)=P\left[\frac{(\overline{X}_2-\overline{X}_1)-2.3}{\sigma(\overline{X}_2-\overline{X}_1)}\le\frac{(\overline{X}_2-\overline{X}_1)-(\mu_2-\mu_1)}{\sigma(\overline{X}_2-\overline{X}_1)}\le\frac{(\overline{X}_2-\overline{X}_1)-1.94}{\sigma(\overline{X}_2-\overline{X}_1)}\right]$$

$$=P\left[\frac{1.27-2.3}{0.78}\le t^{23}\le\frac{1.27-1.94}{0.78}\right]=P(-1.32\le t^{23}\le-0.86)$$

$$=P(0.86\le t^{23}\le 1.32)=P(t^{23}\le 1.32)-P(t^{23}\le 0.86)=0.90-0.80=0.10$$

3.1. تقدير σ_1^2 ، σ_2^2 و $\left(\sigma_1^2/\sigma_2^2\right)$ عند مستوى ثقة 98 %:

- تقدير σ_1^2:

بمستوى ثقة $(1-\alpha)$ مجال الثقة لتباين المجتمع σ_1^2 هو: $\sigma_1^2\in\left[\frac{(n_1-1).\widehat{S}_1^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2)}(n_1-1)}\ ,\ \frac{(n_1-1).\widehat{S}_1^2}{\chi^2_{(\alpha/2)}(n_1-1)}\right]$

لدينا: $(n_1-1).\widehat{S}_1^2=8\times(2.005)^2=32.16$

بمستوى ثقة $(1-\alpha)=0.98$:

$$\alpha=0.02\Rightarrow\begin{cases}\chi^2_{1-\alpha/2}(n_1-1)=\chi^2_{0..99}(8)=20.09\\ \chi^2_{\alpha/2}(n_1-1)=\chi^2_{0.01}(8)=1.647\end{cases}$$

نعوض في مجال التقدير نجد أن:

$$\sigma_1^2\in\left[\frac{32.16}{20.09}\ ,\ \frac{32.16}{1.647}\right]\Rightarrow\sigma_1^2\in[1.6\ ,\ 19.53]$$

وهذا بمستوى ثقة 98 %.

- تقدير σ_2^2:

بمستوى ثقة $(1-\alpha)$ مجال الثقة لتباين المجتمع σ_2^2 هو:

$$\sigma_2^2 \in \left[\frac{(n_2-1).\widehat{S}_2^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2)}(n_2-1)} \ , \ \frac{(n_2-1).\widehat{S}_2^2}{\chi^2_{(\alpha/2)}(n_2-1)} \right]$$

لدينا: $(n_2-1).\widehat{S}_2^2 = 15 \times (1.61)^2 = 38.88$

بمستوى ثقة $(1-\alpha) = 0.98$:

$$\alpha = 0.02 \Rightarrow \begin{cases} \chi^2_{1-\alpha/2}(n_2-1) = \chi^2_{0..99}(15) = 30.578 \\ \chi^2_{\alpha/2}(n_2-1) = \chi^2_{0.01}(15) = 5.229 \end{cases}$$

نعوض في مجال التقدير نجد أن:

$$\sigma_2^2 \in \left[\frac{38.88}{30.578} \ , \ \frac{38.88}{5.229} \right] \Rightarrow \sigma_2^2 \in [1.27 \ , \ 7.44]$$

وهذا بمستوى ثقة 98 %.

- تقدير $\left(\sigma_1^2 / \sigma_2^2 \right)$:

بمستوى ثقة $(1-\alpha)$ مجال الثقة للنسبة $\left(\sigma_1^2 / \sigma_2^2 \right)$ هو:

$$\left(\sigma_1^2 / \sigma_2^2 \right) \in \left[\frac{\widehat{S}_1^2 / \hat{S}_2^2}{F_{(1-\alpha/2)}(n_1-1, n_2-1)} \ , \ \frac{\widehat{S}_1^2 / \hat{S}_2^2}{F_{(\alpha/2)}(n_1-1, n_2-1)} \right]$$

لدينا: $\widehat{S}_1^2 / \hat{S}_2^2 = (2.005)^2 / (1.61)^2 = 1.55$

بمستوى ثقة $(1-\alpha) = 0.98$: $\alpha = 0.02 \Rightarrow F_{(1-\alpha/2)}(n_1-1, n_2-1) = F_{0.99}(8,15) = 4$

$$\alpha = 0.02 \Rightarrow F_{(\alpha/2)}(n_1-1, n_2-1) = F_{0.01}(8,15) = \frac{1}{F_{0.99}(15,8)} \cong \frac{1}{5.67} = 0.176$$

نعوض في مجال التقدير نجد أن:

$$\left(\sigma_1^2 / \sigma_2^2 \right) \in \left[\frac{1.55}{4} \ , \ \frac{1.55}{0.176} \right] \Rightarrow \sigma_1^2 \in [0.39 \ , \ 8.80]$$

وهذا بمستوى ثقة 98 %.

4.1. حساب احتمال أن تكون النسبة $\left(\sigma_2^2 / \sigma_1^2 \right)$ تنتمي للمجال $[0.1135 \ ; \ 2.5641]$:

$$P\left(0.1135 \le \sigma_2^2 / \sigma_1^2 \le 2.5641 \right) = P\left(\frac{1}{2.5641} \le \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \le \frac{1}{0.1135} \right)$$

$$= P\left(0.39 \le \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \le 8.8 \right)$$

$$= 0.98$$

وهذا بالمطابقة مع مجال التقدير السابق.

5.1. تقييم أداء الطلبة بالنسبة للتخصصين:

على حسب اعتقاد الإدارة أن أداء الطلبة يكون مقبول إذا كان معدلهم يفوق 9 من 20، وعليه فان بالنسبة لكل تخصص نختبر فيما إذا كان معدل الطلبة اكبر من 9 أو اقل.

- بالنسبة لطلبة السنة الثانية علوم تجارية:

وتكون صياغته على النحو التالي: $H_0: \mu_1 \geq 9$ $\underline{vs}$ $H_1: \mu_1 \prec 9$

هذه الحالة توافق اختبار أحادي الطرف من اليسار. فعلى أساس الفرضية المعدومة H_0 أداء طلبة السنة الثانية علوم تجارية يكون مقبول.

حجم العينة $n_1 = 9 \prec 30$ أي حالة العينات الصغيرة:

فبمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ يكون:

$$P\left[\frac{\overline{X}_1 - \mu_1}{\sigma(\overline{X}_1)} \geq T_T = t_\alpha^{(n_1-1)}\right] = 1-\alpha$$

الإحصائية المجدولة: $T_T = t_{0.05}^{(9-1)} = -t_{0.95}^{8} = -1.86$

الإحصائية المحسوبة للاختبار: $T_C = \frac{\overline{X}_1 - \mu_0}{\sigma(\overline{X}_1)} = \frac{8.75-9}{0.67} = -0.37$

قاعدة القرار:

نلاحظ أن $T_C = -0.37 \succ T_T = -1.86$ أي أن T_C ينتمي إلى منطقة قبول H_0 بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ وعليه نقبل H_0 بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$. ونقول عندئذ أن متوسط معدل طلبة السنة الثانية علوم تجارية في مقياس الرياضيات اكبر من 9 من 20، فعلى ضوء هذه العينة يمكننا الإقرار أن أداء طلبة السنة الثانية علوم تجارية في مقياس الرياضيات مقبول و هذا بمستوى معنوية 5%.

- بالنسبة لطلبة السنة الثانية علوم اقتصادية:

وتكون صياغته على النحو التالي: $H_0: \mu_2 \geq 9$ $\underline{vs}$ $H_1: \mu_2 \prec 9$

هذه الحالة توافق اختبار أحادي الطرف من اليسار. فعلى أساس الفرضية المعدومة H_0 أداء طلبة السنة الثانية علوم اقتصادية يكون مقبول.

حجم العينة $n_2 = 16 \prec 30$ أي حالة العينات الصغيرة، فبمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ يكون:

$$P\left[\frac{\overline{X}_2 - \mu_2}{\sigma(\overline{X}_2)} \geq T_T = t_\alpha^{(n_2-1)}\right] = 1-\alpha$$

الإحصائية المجدولة: $T_T = t_{0.05}^{(16-1)} = -t_{0.95}^{15} = -1.753$

الإحصائية المحسوبة للاختبار: $T_C = \dfrac{\overline{X}_1 - \mu_0}{\sigma(\overline{X}_1)} = \dfrac{10.02 - 9}{0.39} = 2.61$

قاعدة القرار:

نلاحظ أن $T_C = 2.61 \succ T_T = -1.753$ أي أن T_C ينتمي إلى منطقة قبول H_0 بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ وعليه نقبل H_0 بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$. ونقول عندئذ أن متوسط معدل طلبة السنة الثانية علوم اقتصادية في مقياس الرياضيات اكبر من 9 من 20، فعلى ضوء هذه العينة يمكننا الإقرار أن أداء طلبة السنة الثانية علوم اقتصادية في مقياس الرياضيات مقبول وهذا بمستوى معنوية 5%.

2. بالنسبة لهذا الفرع: $n_1 = n_2 = 60 \succ 30$ حالة العينات الكبرى

العينة (1): طلبة السنة الثانية علوم تجارية

$\widehat{S}_1 = 1.12, \overline{X}_1 = 8.05, n_1 = 60$: تمثل حجم العينة، متوسط العينة وانحراف العينة على التوالي.

و 15 طالب معدلهم لا يتجاوز 9 من 20

العينة (2): طلبة السنة الثانية علوم اقتصادية

$\widehat{S}_2 = 1.4, \overline{X}_2 = 9.94, n_2 = 60$: تمثل حجم العينة، متوسط العينة و انحراف العينة على التوالي.

تقدير μ_1 ، μ_2 و $(\mu_1 - \mu_2)$:

■ تقدير متوسط طلبة السنة الثانية علوم تجارية μ_1:

لدينا: $n_1 = 60 \succ 30$ حالة العينات الكبرى، يكون توزيع المعاينة لمتوسط العينة $\overline{X}_1$ هو توزيع الطبيعي.

فبمستوى ثقة $(1-\alpha)$ يكون مجال التقدير لـ μ_1 هو:

$$\mu_1 \in \left[\overline{X}_1 - Z_{(1-\alpha/2)}\sigma(\overline{X}_1), \overline{X}_1 + Z_{(1-\alpha/2)}\sigma(\overline{X}_1)\right]$$

حساب $\sigma(\overline{X}_1)$:

لدينا: $n_1 / N_1 = 60/200 = 0.3 \succ 0.05$ أي حالة المعاينة النفاذية يكون:

$$\sigma(\overline{X}_1) = \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}\sqrt{\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1}} = \frac{\hat{S}_1}{\sqrt{n_1}}\sqrt{\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1}} = \frac{1.12}{\sqrt{60}}\sqrt{\frac{200 - 60}{200 - 1}} = 0.12$$

بمستوى ثقة $(1-\alpha) = 0.95$ يكون: $(1-\alpha) = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow Z_{(1-\alpha/2)} = Z_{0.975} = 1.96$

يكون: $Z_{(1-\alpha/2)}\sigma(\overline{X}_1) = Z_{0.975}.\sigma(\overline{X}_1) = 1.96 \times 0.12 = 0.24$

نعوض في مجال التقدير لـ μ_1 فنجد أن: $\mu_1 \in [8.05 - 0.24 \ , \ 8.05 + 0.24] \Rightarrow \mu_1 \in [7.81 \ , \ 8.29]$

وهذا بمستوى ثقة 95 %.

- تقدير متوسط طلبة السنة الثانية علوم اقتصادية μ_2 :

لدينا: $n_2 = 60 \succ 30$ حالة العينات الكبرى، يكون توزيع المعاينة لمتوسط العينة $\overline{X}_2$ هو توزيع طبيعي.

فبمستوى ثقة $(1-\alpha)$ يكون مجال التقدير لـ μ_2 هو:

$$\mu_2 \in \left[\overline{X}_2 - Z_{(1-\alpha/2)}\sigma(\overline{X}_2), \overline{X}_2 + Z_{(1-\alpha/2)}\sigma(\overline{X}_2)\right]$$

حساب $\sigma(\overline{X}_2)$:

لدينا: $n_2/N_2 = 60/250 = 0.24 \succ 0.05$ أي حالة المعاينة النفاذية يكون:

$$\sigma(\overline{X}_2) = \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}}\sqrt{\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1}} = \frac{\hat{S}_2}{\sqrt{n_2}}\sqrt{\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1}} = \frac{1.4}{\sqrt{60}}\sqrt{\frac{250-60}{250-1}} = 0.16$$

بمستوى ثقة $(1-\alpha) = 0.95$ يكون: $(1-\alpha) = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow Z_{(1-\alpha/2)} = Z_{0.975} = 1.96$

يكون: $Z_{(1-\alpha/2)}\sigma(\overline{X}_2) = Z_{0.975}.\sigma(\overline{X}_2) = 1.96 \times 0.16 = 0.31$

نعوض في مجال التقدير لـ μ_1 فنجد أن:

$$\mu_2 \in [9.94 - 0.31\ ,\ 9.94 + 0.31] \Rightarrow \mu_2 \in [9.63\ ,\ 10.25]$$

وهذا بمستوى ثقة 95 %.

- تقدير الفرق $(\mu_1 - \mu_2)$:

لدينا: $n_1, n_2 = 60 \succ 30$ حالة العينات الكبرى ، يكون توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين للعينتين $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ هو توزيع الطبيعي:

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \to N(\mu_1 - \mu_2, \sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2))$$

فبمستوى ثقة $(1-\alpha)$ يكون مجال التقدير لـ μ_1 هو:

$$(\mu_1 - \mu_2) \in \left[(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - Z_{(1-\alpha/2)}\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)\ ,(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + Z_{(1-\alpha/2)}\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)\right]$$

حساب $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$: $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = 9.94 - 8.05 = -1.89$

حساب $\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$: $\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \sqrt{\sigma^2(\overline{X}_1) + \sigma^2(\overline{X}_2)} = \sqrt{(0.12)^2 + (0.16)^2} \cong 0.2$

بمستوى ثقة $(1-\alpha) = 0.95$ يكون: $(1-\alpha) = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow Z_{(1-\alpha/2)} = Z_{0.975} = 1.96$

يكون: $Z_{(1-\alpha/2)}\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = Z_{0.975}.\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = 1.96 \times 0.2 = 0.39$

نعوض في مجال التقدير لـ $(\mu_1 - \mu_2)$ فنجد أن:

$$(\mu_1 - \mu_2) \in [-1.89 - 0.39\ ,\ -1.89 + 0.39] \Rightarrow (\mu_1 - \mu_2) \in [-2.28\ ,\ -1.5]$$

وهذا بمستوى ثقة 95 %.

2..2 أختبر وجود فرق بين معدلي طلبة التخصصين عند عتبة معنوية $\alpha = 0.05$:

أي أننا نختبر المساواة بين معدل طلبة العلوم الاقتصادية ومعدل طلبة العلوم التجارية في مقياس الرياضيات. و تكون صياغة الاختبار على النحو التالي:

$$H_0 :\ \mu_1 = \mu_2 \qquad \underline{vs} \qquad H_1 :\ \mu_1 \prec \mu_2 \vee \mu_1 \succ \mu_2$$

ويمكننا أن نكتب كذلك: $H_0 :\ \mu_1 - \mu_2 = 0 \qquad \underline{vs} \qquad H_1 :\ \mu_1 - \mu_2 \prec 0 \ \vee \ \mu_1 - \mu_2 \succ 0$

هذه الحالة توافق اختبار ثنائي الطرف. فعلى أساس الفرضية المعدومة H_0 لا يوجد فرق بين معدل طلبة السنة الثانية علوم تجارية و معدل طلبة السنة الثانية اقتصادية.

حجم العينة $n_1 = n_2 = 60 \succ 30$ أي حالة العينات الكبرى، فبمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ يكون:

$$P\left[-Z_{1-\alpha/2} \le \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)} \le Z_{1-\alpha/2} \right] = 1 - \alpha = 0.95$$

الإحصائية المجدولة: تتمثل في المجال $[-Z_{1-\alpha/2}, Z_{1-\alpha/2}] \equiv [-1.96,1.96]$

الإحصائية المحسوبة للاختبار: $Z_C = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}{\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)} = \frac{8.05 - 9.94}{0.2} = -9.45$

قاعدة القرار:

نلاحظ ان $Z_C = -9.45 \notin [-1.96,1.96]$ أي ان Z_C لا ينتمي إلى منطقة قبول H_0 وعليه نرفض H_0 بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$. ونقول عندئذ أنه يوجد فرق بين معدل طلبة السنة الثانية علوم اقتصادية ومعدل طلبة السنة الثانية علوم تجارية في مقياس الرياضيات وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية 5%.

3.2. اختبار بكون معدل طلبة العلوم التجارية أكبر من معدل طلبة العلوم الاقتصادية عند عتبة معنوية $\alpha = 0.05$:

وتكون صياغة الاختبار على النحو التالي: $H_0 :\ \mu_1 \ge \mu_2 \qquad \underline{vs} \qquad H_1 :\ \mu_1 \prec \mu_2$

ويمكننا أن نكتب كذلك: $H_0 :\ \mu_1 - \mu_2 \ge 0 \qquad \underline{vs} \qquad H_1 :\ \mu_1 - \mu_2 \prec 0$

هذه الحالة توافق اختبار أحادي الطرف من اليسار. فعلى أساس الفرضية المعدومة H_0 معدل طلبة العلوم التجارية أكبر من معدل طلبة العلوم الاقتصادية.

حجم العينة $n_1 = n_2 = 60 \succ 30$ أي حالة العينات الكبرى، فبمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ يكون:

ونكتب: $$P\left[\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)} \ge -Z_{1-\alpha} \right] = 1 - \alpha = 0.95$$

الإحصائية المجدولة: $Z_T = -Z_{1-\alpha} = -1.64$

الإحصائية المحسوبة للاختبار: $Z_C = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sigma(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} = \frac{8.05 - 9.94}{0.2} = -9.45$

قاعدة القرار:

نلاحظ أن $Z_C = -9.45 \prec Z_T = -1.64$ أي أن Z_C لا ينتمي إلى منطقة قبول H_0 وعليه نرفض H_0 بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$. ونقول عندئذ أن معدل طلبة العلوم الاقتصادية أكبر من معدل طلبة العلوم التجارية في مقياس الرياضيات وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية 5%.

4.2. اختبار أي من الدفعتين أكثر تجانس عند عتبة معنوية $\alpha = 0.05$:

من اجل اختبار أي من الدفعتين أكثر تجانس فإننا نقارن بين تباينين التخصصين، فالتخصص الأقل تباين هو الأكثر تجانس.وعليه تكون صياغة الاختبار على النحو التالي:

$$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \qquad \underline{vs} \qquad H_1 : \sigma_1^2 \succ \sigma_2^2$$

فعلى أساس الفرضية المعدومة H_0 تباين العلوم التجارية اقل من تباين العلوم الاقتصادية أي أن تخصص العلوم التجارية الأكثر تجانس. ويمكننا إعادة صياغة الفرضية H_0 على النحو التالي:

$$H_0 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \leq 1 \qquad \underline{vs} \qquad H_1 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \succ 1$$

هذه الحالة توافق اختبار أحادي الطرف من اليمين.

فبمستوى معنوية α يكون:

$$P\left[\frac{\widehat{S}_1^2 / \sigma_1^2}{\widehat{S}_2^2 / \sigma_2^2} \leq F_{(1-\alpha)}^{(n_1-1,n_2-1)} \right] = 1 - \alpha$$

الإحصائية المجدولة: $F_T = F_{(1-\alpha)}^{(n_1-1,n_2-1)} = F_{0.95}(59,59) = 1.53$

الإحصائية المحسوبة للاختبار: $F_C = \frac{\widehat{S}_1^2 / \widehat{S}_2^2}{1} = \widehat{S}_1^2 / \widehat{S}_2^2 = 0.64$

قاعدة القرار:

نلاحظ أن: $F_C = 0.64 \leq F_T = 1.53$ نقبل H_0 بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$، ونقول عندئذ أن نسبة تباين العلوم التجارية إلى تباين العلوم الاقتصادية أي النسبة $\left(\sigma_1^2 / \sigma_2^2 \right)$ اقل أو تساوي 1 وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

وعليه يمكننا القول أن تباين العلوم التجارية اقل من تباين العلوم الاقتصادية أي أن تخصص العلوم التجارية اثر تجانس من تخصص العلوم الاقتصادية وهذا على ضوء هذه العينة وبمستوى معنوية 5%. وعليه يمكننا أن نستنتج أن نسبة النجاح في العلوم التجارية اكبر من نسبة النجاح في العلوم الاقتصادية.

5.2 تقدير نسبة الطلبة المقبول أداءهم في تخصص العلوم التجارية عند مستوى الثقة 95%:

نرمز بـ P لنسبة الطلبة المقبول أداءهم في تخصص العلوم التجارية أي معدلهم يفوق 9 من 20 وهذا ضمن الدفعة كلها.

نرمز بـ r لنسبة الطلبة المقبول أداءهم في تخصص العلوم التجارية أي معدلهم يفوق 9 من 20 وهذا ضمن العينة فقط.

يكون: $r = \frac{60-15}{60} = 0.75$ أي أن نسبة الطلبة المقبول أداءهم في تخصص العلوم التجارية أي معدلهم يفوق 9 من 20 ضمن العينة هو 75%.

لدينا حجم العينة يفوق 60 أي حالة العينات الكبرى، فبمستوى ثقة $(1-\alpha)$ يكون مجال التقدير للنسبة P هو:

$$P \in \left[r - Z_{1-\alpha/2}\sigma(r) \ , \ r + Z_{1-\alpha/2}\sigma(r) \right]$$

حساب $\sigma(r)$: $\sigma(r) = \sqrt{\frac{r(1-r)}{n_1}}\sqrt{\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1}} = \sqrt{\frac{0.75 \times (1-0.75)}{60}}\sqrt{\frac{200-60}{200-1}} = 0.047$

وبمستوى ثقة $(1-\alpha) = 0.95$ يكون: $(1-\alpha) = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow Z_{0.975} = 1.96$

أي أن: $Z_{0.975}.\sigma(r) = 1.96 \times 0.047 = 0.09$

نعوض في مجال التقدير فنجد أن: $P \in [0.75 - 0.09 \ , \ 0.75 + 0.09] \Rightarrow P \in [0.66 \ , \ 0.84]$

أي نسبة الطلبة المقبول أداءهم في تخصص العلوم التجارية تتراوح بين 66% و 84% وهذا بمستوى ثقة 95%.

6.2. اختبار أن نسبة الطلبة المقبول أداءهم في تخصص العلوم التجارية تفوق 85 %:

وتكون صياغته على النحو التالي: $H_0 : P \geq 0.85$ $\underline{vs}$ $H_1 : P \prec 0.85$

هذه الحالة توافق اختبار أحادي الطرف من اليسار.

لدينا: $n_1 = 60 \geq 30$ حالة العينات الكبرى، فبمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ يكون:

$$P\left[\frac{r-P}{\sigma(r)} \geq Z_T = Z_\alpha \right] = 1 - \alpha$$

الإحصائية المجدولة: $Z_T = Z_\alpha = -Z_{(1-\alpha)} = -Z_{0.95} = -1.64$

الإحصائية المحسوبة للاختبار: $Z_C = \frac{r - P_0}{\sigma(r)} = \frac{0.75 - 0.85}{0.047} = -2.13$

قاعدة القرار:

نلاحظ أن: $Z_C = -2.13 \prec Z_T = -1.64$ نرفض H_0 بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$، ونقول عندئذ أن نسبة الطلبة المقبول أداءهم في تخصص العلوم التجارية اقل من 85% و هذا على ضوء هذه العينة و بمستوى معنوية 5%.

المراجـــــع

المراجع باللغة العربية

1. محمد صبحي أبو صالح(2007)، **الموجز في الطرق الإحصائية**، دار اليازودي العلمية للنسر والإشهار، عمان، الأردن.

2. محمد عبد العال النعيمي، حسن ياسين طعمه(2015)، **الإحصاء التطبيقي**، الطبعة الثانية، دار وائل للنشر، عمان، الأردن.

المراجع باللغة الأجنبية

3. Edouard B. Manoukien(1986), **Guide de Statistiques Appliquée**, Hermann,75015 ,Paris, France.

4. Francois Aubin(2001), **L'essentiel des Probabilités et Statistiques**, ellipses édition, Paris Cedex 15, France.

5. G. Saporta(1990), **Probabilité**, **Analyse des données et Statistiques**, édition Technique, Paris Cedex 15, France.

6. Jean – M. Mrtel et Raymond Nadeau(1980), **Statistiques En Gestion et en économie**, Edition Eska S.A.R.L., Université de Paris, France.

7. Nathalie Caron et Philippe Tassi(1991), **Problèmes Résolus de Statistiques Mathématiques**, 2éme édition, ECONOMICA.

8. Paul G. Hoel, Traduit et adapté par Guy Ansion(1998), **Statistiques Mathématiques**, Armand Colin, Université de Paris, France.

9. Philippe Tassi(1992), **Méthodes Statistiques**, 2éme édition, ECONOMICA.

10. Pierre Dagnelie(1998), **Statistiques Théorique et appliquée**, Tome 1 et 2, Université de Paris, France.